

П. Н. Вабищевич

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

## РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

- Аппроксимация по пространству
- Двухслойные схемы
- Устойчивость в банаховых пространствах
- Трехслойные операторно-разностные схемы
- Схемы повышенного порядка точности
- Операторно-разностные схемы расщепления
- Численное решение систем эволюционных уравнений



URSS

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. М. К. АММОСОВА

---

**П. Н. Вабищевич**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
РЕШЕНИЯ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ  
ЗАДАЧ**



**URSS**  
**МОСКВА**

ББК 22.161.6 22.18 22.19 32.811

**Вабищевич Петр Николаевич**

**Численные методы решения нестационарных задач.**

М.: ЛЕНАНД, 2021. — 464 с.

Исследование прикладных задач базируется на численном решении нестационарных задач для уравнений с частными производными. После аппроксимации по пространству мы приходим к задачам с начальными данными для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В книге рассмотрены численные методы приближенного решения таких задач. Исследуются общие условия устойчивости двух- и трехслойных операторно-разностных схем, рассматриваются схемы высокого порядка точности. С использованием представления оператора задачи в виде суммы операторов строятся схемы расщепления, когда переход на новый временной слой реализуется на основе решения более простых задач для отдельных операторных слагаемых. Выделены важные для вычислительной практики задачи для систем уравнений.

Книга рассчитана на студентов вузов, обучающихся по специальности «Прикладная математика», и специалистов по вычислительной математике и математическому моделированию.

*Работа выполнена при финансовой поддержке  
мегагранта Правительства РФ, проект 14. У26.31.0013*

ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.  
Формат 60×90/16. Печ. л. 29. Зак. № 140.

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленного электронного оригинал-макета  
в АО «Областная типография «Печатный двор»,  
432049, г. Ульяновск, ул. Пушкирева, 27.

ISBN 978–5–9710–8959–9

© ЛЕНАНД, 2021

30223 ID 270310



9 785971 089599



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# Содержание

<b>Предисловие</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>Основные обозначения</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>Глава 1. Предварительные сведения</b> . . . . .	<b>16</b>
1.1. Линейные пространства . . . . .	16
1.2. Линейные операторы . . . . .	19
1.3. Задача Коши для уравнения первого порядка . . . . .	23
1.4. Уравнения второго порядка . . . . .	26
1.5. Замечания и библиографический комментарий . . . . .	27
1.6. Задачи . . . . .	27
<b>Глава 2. Аппроксимация по пространству</b> . . . . .	<b>29</b>
2.1. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка . . . . .	29
2.1.1. Линейное уравнение . . . . .	29
2.1.2. Принцип максимума . . . . .	31
2.1.3. Краевые задачи в гильбертовом пространстве . . . . .	33
2.1.4. Некоторые разностные соотношения . . . . .	38
2.1.5. Свойства разностных операторов . . . . .	41
2.1.6. Граничные условия третьего рода . . . . .	47
2.2. Нестационарные задачи . . . . .	50
2.2.1. Линейное параболическое уравнение . . . . .	50
2.2.2. Принцип максимума . . . . .	52
2.2.3. Операторная формулировка нестационарных задач . . . . .	54
2.2.4. Дифференциально-операторная задача . . . . .	56
2.2.5. Гиперболические задачи . . . . .	58
2.3. Нестационарные задачи конвекции-диффузии . . . . .	62
2.3.1. Дифференциальные задачи . . . . .	62
2.3.2. Свойства операторов диффузионного и конвективного переноса . . . . .	64
2.3.3. Априорные оценки . . . . .	67
2.3.4. Разностные операторы . . . . .	69
2.3.5. Другие параболические задачи . . . . .	77
2.4. Метод конечных объемов . . . . .	78
2.4.1. Треугольные сетки . . . . .	78
2.4.2. Разностные схемы на треугольных сетках . . . . .	81

2.4.3. Сетки . . . . .	83
2.4.4. Оператор диффузионного переноса . . . . .	84
2.4.5. Разностная лемма Фридрихса . . . . .	87
2.4.6. Операторы конвективного переноса . . . . .	90
2.4.7. Монотонные аппроксимации . . . . .	96
2.4.8. Дивергентные аппроксимации . . . . .	98
2.5. Метод конечных элементов . . . . .	100
2.5.1. Дифференциальная задача . . . . .	101
2.5.2. Конечно-элементная аппроксимация . . . . .	102
2.5.3. Аппроксимация по пространству . . . . .	104
2.5.4. Операторные формулировки . . . . .	107
2.6. Замечания и библиографический комментарий . . . . .	109
2.7. Задачи . . . . .	110
<b>Глава 3. Двухслойные схемы . . . . .</b>	<b>113</b>
3.1. Условия устойчивости операторно-разностных схем . . . . .	113
3.1.1. Задача Коши для дифференциально-операторного уравнения . . . . .	113
3.1.2. Базовые понятия теории устойчивости . . . . .	115
3.1.3. Критерии устойчивости . . . . .	122
3.1.4. Задачи с переменным оператором . . . . .	125
3.1.5. Несамосопряженные операторы . . . . .	128
3.2. Устойчивость по правой части . . . . .	131
3.2.1. Стандартные оценки . . . . .	131
3.2.2. Выделение стационарной неоднородности . . . . .	133
3.2.3. Более жесткие ограничения по устойчивости . . . . .	137
3.3. Двухслойные схемы с весами . . . . .	138
3.3.1. Условия устойчивости . . . . .	139
3.3.2. Задачи с незнакоопределенным оператором . . . . .	141
3.3.3. Неоднородные схемы с весами . . . . .	145
3.3.4. Схемы с весовыми операторами . . . . .	148
3.3.5. Сильная устойчивость . . . . .	151
3.4. Схемы метода конечных элементов . . . . .	156
3.4.1. Общие соображения . . . . .	156
3.4.2. Устойчивость схем конечных элементов . . . . .	158
3.4.3. Условия устойчивости . . . . .	160
3.4.4. $\rho$ -устойчивость проекционно-разностных схем . . . . .	163
3.4.5. Схемы с весами . . . . .	166
3.4.6. Устойчивость по правой части . . . . .	167
3.5. Замечания и библиографический комментарий . . . . .	169
3.6. Задачи . . . . .	170

---

<b>Глава 4. Устойчивость в банаховых пространствах . . . . .</b>	<b>174</b>
4.1. Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	174
4.1.1. Постановка задачи . . . . .	174
4.1.2. Логарифмическая норма . . . . .	176
4.1.3. Оценка устойчивости . . . . .	178
4.2. Устойчивость двухслойных схем . . . . .	179
4.2.1. Общие соображения . . . . .	179
4.2.2. Схема с весами . . . . .	180
4.2.3. Разностные схемы для одномерного параболического уравнения . . . . .	182
4.3. Разностные схемы для уравнений конвекции-диффузии . .	183
4.3.1. Введение . . . . .	183
4.3.2. Уравнения конвекции-диффузии . . . . .	185
4.3.3. Разностные схемы для уравнений конвекции-диффузии . .	187
4.3.4. Экспоненциальные схемы . . . . .	191
4.3.5. Многомерные задачи . . . . .	194
4.3.6. Локально-одномерные схемы . . . . .	197
4.3.7. Задачи конвекции-диффузии-реакции . . . . .	201
4.4. Замечания и библиографический комментарий . . . . .	205
4.5. Задачи . . . . .	205
<b>Глава 5. Трехслойные операторно-разностные схемы . . . . .</b>	<b>207</b>
5.1. Устойчивость по начальным данным . . . . .	207
5.1.1. Достаточные условия устойчивости . . . . .	207
5.1.2. Переход к двухслойной схеме . . . . .	209
5.1.3. $\rho$ -устойчивость трехслойных схем . . . . .	211
5.2. Другие результаты по устойчивости . . . . .	213
5.2.1. Оценки в более простых нормах . . . . .	214
5.2.2. Устойчивость по правой части . . . . .	215
5.2.3. Устойчивость проекционно-разностных схем . . . . .	216
5.2.4. Устойчивость по правой части . . . . .	219
5.3. Трехслойные схемы с весами . . . . .	220
5.3.1. Схемы с весами для уравнений первого порядка . . . . .	220
5.3.2. Схемы с весами для уравнений второго порядка . . . . .	221
5.4. Трехслойные схемы для уравнения адвекции . . . . .	223
5.4.1. Введение . . . . .	223
5.4.2. Постановка задачи . . . . .	224
5.4.3. Трехслойные схемы . . . . .	226
5.4.4. Схемы четвертого порядка точности . . . . .	231
5.5. Замечания и библиографический комментарий . . . . .	235
5.6. Задачи . . . . .	236

<b>Глава 6. Схемы повышенного порядка точности</b> . . . . .	<b>238</b>
6.1. Численное решение задачи Коши . . . . .	238
6.1.1. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	238
6.1.2. Методы Рунге—Кутты . . . . .	239
6.1.3. Многошаговые методы . . . . .	242
6.2. SM-устойчивые схемы . . . . .	245
6.2.1. Аппроксимация по времени . . . . .	245
6.2.2. Схемы на основе Паде-аппроксимаций . . . . .	248
6.2.3. Факторизованные SM-устойчивые разностные схемы . . . . .	252
6.2.4. Задачи с кососимметричным оператором . . . . .	257
6.3. Факторизованные схемы второго порядка точности . . . . .	259
6.3.1. SM-устойчивая схема второго порядка . . . . .	259
6.3.2. Трехслойная факторизованная схема . . . . .	261
6.3.3. SM-устойчивые факторизованные схемы . . . . .	263
6.4. Точные схемы для фундаментальной моды решения параболических задач . . . . .	265
6.4.1. Постановка задачи . . . . .	266
6.4.2. Нестандартные схемы с весами . . . . .	269
6.4.3. Схемы на основе Паде-аппроксимаций . . . . .	272
6.5. Замечания и библиографический комментарий . . . . .	274
6.6. Задачи . . . . .	275
<b>Глава 7. Операторно-разностные схемы расщепления</b> . . . . .	<b>277</b>
7.1. Факторизованные схемы . . . . .	277
7.1.1. Общее рассмотрение . . . . .	277
7.1.2. Схемы переменных направлений как факторизованные схемы . . . . .	279
7.1.3. Устойчивость и точность факторизованных схем . . . . .	280
7.1.4. Факторизованные схемы многокомпонентного расщепления . . . . .	282
7.2. Схемы покомпонентного расщепления . . . . .	284
7.2.1. Схемы покомпонентного расщепления . . . . .	284
7.2.2. Оценки решений промежуточных задач . . . . .	285
7.2.3. Устойчивость схем покомпонентного расщепления . . . . .	286
7.2.4. Сходимость схем покомпонентного расщепления . . . . .	288
7.2.5. Аддитивно-усредненные схемы . . . . .	289
7.3. Регуляризованные схемы расщепления . . . . .	292
7.3.1. Принцип регуляризации разностных схем . . . . .	292
7.3.2. Аддитивная и мультипликативная регуляризация . . . . .	293
7.3.3. Регуляризация аддитивных схем . . . . .	296
7.3.4. Схемы повышенного порядка точности . . . . .	299
7.3.5. Регуляризованные схемы для уравнений второго порядка . . . . .	302
7.4. Векторные аддитивные операторно-разностные схемы . . . . .	303

---

7.4.1. Векторная дифференциальная задача . . . . .	304
7.4.2. Устойчивость векторных аддитивных схем . . . . .	306
7.4.3. Устойчивость по правой части . . . . .	309
7.4.4. Схемы второго порядка точности . . . . .	310
7.5. Явные схемы для параболических и гиперболических уравнений . . . . .	313
7.5.1. Введение . . . . .	313
7.5.2. Модельная задача . . . . .	314
7.5.3. Схемы попеременно-треугольного метода . . . . .	317
7.5.4. Многослойные схемы попеременно-треугольного метода . . . . .	320
7.5.5. Гиперболические уравнения . . . . .	323
7.6. Замечания и библиографический комментарий . . . . .	325
7.7. Задачи . . . . .	325
<b>Глава 8. Дополнительный материал . . . . .</b>	<b>329</b>
8.1. Явно-неявные схемы для эволюционного уравнения первого порядка . . . . .	329
8.1.1. Введение . . . . .	330
8.1.2. Постановка задачи . . . . .	330
8.1.3. Расщепление основного оператора . . . . .	332
8.1.4. Схемы второго порядка аппроксимации . . . . .	334
8.1.5. Расщепление оператора при производной . . . . .	336
8.1.6. Общий случай . . . . .	338
8.2. Численное решение нестационарных задач с различными масштабами времени . . . . .	339
8.2.1. Введение . . . . .	339
8.2.2. Постановка задачи . . . . .	339
8.2.3. Схемы покомпонентного расщепления . . . . .	342
8.2.4. Векторные аддитивные схемы для многомасштабных задач . . . . .	343
8.3. Неявные итерационные схемы . . . . .	347
8.3.1. Введение . . . . .	347
8.3.2. Неявные двухслойные схемы . . . . .	349
8.3.3. Итерационная реализация неявных схем . . . . .	352
8.3.4. Неполная сходимость итерационного метода . . . . .	354
8.3.5. Более общие задачи . . . . .	358
8.4. Выбор шага по времени . . . . .	360
8.4.1. Проблема контроля шага по времени . . . . .	361
8.4.2. Постановка задачи . . . . .	362
8.4.3. Алгоритм оценки шага по времени . . . . .	364
8.4.4. Обобщения . . . . .	367
8.5. Схемы расщепления решения для нестационарных задач . . . . .	369
8.5.1. Введение . . . . .	369
8.5.2. Расщепление решения . . . . .	371



8.5.3. Схема расщепления . . . . .	374
8.5.4. Решение на прямой сумме подпространств . . . . .	380
8.6. Замечания и библиографический комментарий . . . . .	383
8.7. Задачи . . . . .	384
<b>Глава 9. Численное решение систем</b>	
<b>эволюционных уравнений . . . . .</b>	<b>387</b>
9.1. Некоторые классы систем эволюционных уравнений . . . . .	387
9.1.1. Параболические задачи в потоковых переменных . . . . .	388
9.1.2. Системы параболических и гиперболических уравнений . . . . .	390
9.1.3. Системы с попарно сопряженными операторами . . . . .	393
9.1.4. Дифференциально-алгебраические системы эволюционных уравнений . . . . .	396
9.2. Схемы покомпонентного расщепления для векторных задач . . . . .	399
9.2.1. Эволюционное уравнение первого порядка . . . . .	400
9.2.2. Схемы покомпонентного расщепления . . . . .	403
9.2.3. Трехслойные схемы покомпонентного расщепления . . . . .	405
9.2.4. Уравнения второго порядка . . . . .	407
9.3. Схемы расщепления для систем уравнений первого порядка . . . . .	409
9.3.1. Дифференциально-операторная задача . . . . .	409
9.3.2. Схемы с весами . . . . .	412
9.3.3. Явно-неявные схемы . . . . .	414
9.3.4. Аддитивные схемы покомпонентного расщепления . . . . .	419
9.3.5. Регуляризованные аддитивные схемы . . . . .	421
9.4. Дифференциально-алгебраические системы с одним эволюционным уравнением . . . . .	423
9.4.1. Постановка задачи . . . . .	423
9.4.2. Схемы с весами . . . . .	428
9.4.3. Схемы расщепления для нахождения $m$ -й компоненты решения . . . . .	432
9.4.4. Аддитивные схемы для системы уравнений . . . . .	436
9.5. Дифференциально-алгебраические системы с одним алгебраическим уравнением . . . . .	441
9.5.1. Дифференциально-операторная задача . . . . .	441
9.5.2. Схема с весами . . . . .	443
9.5.3. Схемы покомпонентного расщепления . . . . .	445
9.5.4. Более общие задачи . . . . .	448
9.6. Замечания и библиографический комментарий . . . . .	450
9.7. Задачи . . . . .	450
<b>Литература . . . . .</b>	<b>453</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>460</b>