

ДВИЖЕНИЕ КАПЛИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

И. В. Денисова, В. А. Солонников

$t \geq 0$

\mathbb{R}^3

$S_{R_0}(0)$

ν^+, ρ^+

Ω_t^+

0

ν^-, ρ^-

Ω_t^-

Γ_t

Σ

www.e.lanbook.com



**ЭБС
ЛАНЬ**



ФГБУН
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ
МАШИНОВЕДЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК



ФГБУН
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМ. В.А.СТЕКЛОВА РАН

И. В. ДЕНИСОВА,
В. А. СОЛОННИКОВ

ДВИЖЕНИЕ КАПЛИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

МОНОГРАФИЯ

Издание второе, стереотипное



ЛАНЬ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР
2021

УДК 532
ББК 22.253я73

Д 33 Денисова И. В. Движение капли в несжимаемой жидкости : монография / И. В. Денисова, В. А. Солонников. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 296 с. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-8114-7897-2

Задача об эволюции двух вязких несмешивающихся жидкостей с неизвестной поверхностью раздела принадлежит к интенсивно изучаемому в настоящее время классу задач со свободными границами, поскольку в ней наряду с векторным полем скоростей и функцией давления обеих жидкостей подлежит определению поверхность их раздела. Теория этих задач для уравнений Навье — Стокса насчитывает в своем развитии лишь чуть больше четырёх десятилетий, хотя их постановка восходит к классическим работам XIX в.

В монографии представлена общая картина гладкости решений задач, описывающих одновременное движение двух несжимаемых жидкостей. В частности, проведено исследование разрешимости в пространствах Соболева — Слободецкого и Гёльдера начально-краевых задач для уравнений Стокса и Навье — Стокса в ограниченных областях с замкнутой границей раздела двух сред.

Целевая аудитория монографии — студенты старших курсов, аспиранты физико-математических факультетов университетов, научные сотрудники, занимающиеся математической гидродинамикой и смежными вопросами.

УДК 532
ББК 22.253я73

Рецензент

В. В. ПУХНАЧЕВ — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, член-корреспондент РАН.

Обложка
П. И. ПОЛЯКОВА

© Издательство «Лань», 2021
© И. В. Денисова, В. А. Солонников, 2021
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ	6
1.1. Постановка задачи. Определение пространств	9
§ 2. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ С УЧЁТОМ СИЛ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ	15
2.1. Вспомогательные предложения	15
2.2. Явное решение модельной однородной задачи	16
2.3. Теоремы о мультипликаторах Фурье в пространствах Гёльдера	20
2.4. Оценка решения задачи (2.2.1)	28
2.5. Задача для неоднородной системы Стокса	36
§ 3. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА БЕЗ УЧЁТА СИЛ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ	48
3.1. Постановка задачи и формулировка теоремы существования	48
3.2. Предварительные рассуждения	49
3.3. Однородная задача. Явное решение	56
3.4. Доказательство теоремы 3.3.1	60
3.5. Доказательство теоремы 3.1.1	70
§ 4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА С ЗАМКНУТОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ПРИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ	76
4.1. Вспомогательные утверждения. Формулировка результатов	77
4.2. Априорные оценки решения задачи (1.1.7)	80
4.3. Разрешимость задачи (1.1.7). Построение регуляризатора	90
§ 5. ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА	99
5.1. Весовые гёльдеровские пространства. Формулировка локальной теоремы существования для нелинейной задачи	99
5.2. Весовые оценки для линейной задачи (1.1.7)	103
5.3. Разрешимость линеаризованной задачи на конечном интервале времени	112
5.4. Доказательство разрешимости нелинейной задачи (5.1.1)	125
§ 6. ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА ДЛЯ ЗАДАЧИ БЕЗ УЧЁТА СИЛ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ	133
6.1. Формулировка основного результата	133

6.2.	Линейная задача с замкнутой границей раздела жидкостей	135
6.3.	Линеаризованная задача	137
6.4.	Глобальная разрешимость задачи (1.1.1) при $\sigma = 0$	139
§ 7.	ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ С УЧЁТОМ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ. ПРОСТРАНСТВА ГЁЛЬДЕРА	147
7.1.	Постановка задачи. Формулировка основного результата	147
7.2.	Энергетическая оценка решения	152
7.3.	Линеаризованная задача	161
7.4.	Глобальная классическая разрешимость задачи (7.1.3), (1.0.3)	163
§ 8.	ЗАДАЧА ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ	173
8.1.	Постановка задачи и формулировка результатов	173
8.2.	Линеаризованные задачи	176
8.3.	Разрешимость задачи (8.1.2)	181
8.4.	Задача во всём пространстве с постоянным значением температуры на бесконечности	189
§ 9.	ДВИЖЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ОБЕРБЕКА – БУССИНЕСКА	192
9.1.	Постановка задачи и формулировка основных результатов	192
9.2.	Оценки начального давления и решений линеаризованных задач	194
9.3.	Локальная разрешимость задачи (9.1.3), (9.1.4)	200
9.4.	Глобальная разрешимость задачи в приближении Обербека – Буссинеска	208
§ 10.	ЛОКАЛЬНАЯ L_2 -РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПРИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ	218
10.1.	Определение пространств Соболева – Слободецкого и введение их эквивалентных нормировок	218
10.2.	L_2 -оценки решения модельной задачи с плоской границей раздела жидкостей	221
10.3.	Априорные оценки решения задачи с замкнутой границей раздела	230
10.4.	L_2 -разрешимость линейной задачи с замкнутой границей в \mathbb{R}^3	235
10.5.	Локальная разрешимость нелинейной задачи в L_2 -постановке	248
§ 11.	ГЛОБАЛЬНАЯ L_2 -РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ БЕЗ УЧЁТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ	256
11.1.	Формулировка глобальной теоремы существования	256
11.2.	Вспомогательные предложения	258

11.3. Доказательство существования глобального решения	261
§ 12. L_2 -теория для двухфазной капиллярной жидкости	263
12.1. Теорема о глобальной L_2 -разрешимости	264
12.2. Линейная задача	268
12.3. Нелинейная задача	275
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	284
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	285