

В. И. СМ ИРНОВ

КУРС
ВЫСШЕЙ
МАТЕМАТИКИ

ТОМ
II

Акад. В. И. СМИРНОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ ВТОРОЙ

ИЗДАНИЕ ТРИНАДЦАТОЕ
СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено
Главным управлением высшего образования
Министерства культуры СССР
в качестве учебника
для физико-математических факультетов
государственных университетов
и вузов с расширенной программой*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1954

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Уравнения первого порядка

1. Общие понятия (11). 2. Уравнения с отделяющимися переменными (12). 3. Однородные уравнения (15). 4. Линейные уравнения и уравнение Бернулли (19). 5. Определение решения дифференциального уравнения по начальному условию (25). 6. Способ Эйлера-Коши (29). 7. Общий интеграл (32). 8. Уравнение Клеро (37). 9. Уравнение Лагранжа (39). 10. Огибающие семейства кривых и особые решения (40). 11. Уравнения квадратные относительно y' (44). 12. Изогональные траектории (45).

§ 2. Дифференциальные уравнения высших порядков и системы уравнений

13. Общие понятия (48). 14. Графические способы интегрирования дифференциального уравнения второго порядка (53). 15. Уравнение $y^{(n)} = f(x)$ (57). 16. Изгиб балки (59). 17. Понижение порядка дифференциального уравнения (63). 18. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (67). 19. Примеры (70). 20. Системы уравнений и уравнения высших порядков (75). 21. Линейные уравнения с частными производными (76). 22. Геометрическая интерпретация (79). 23. Примеры (81).

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Общая теория и уравнения с постоянными коэффициентами

24. Линейные однородные уравнения второго порядка (85). 25. Линейные неоднородные уравнения второго порядка (88). 26. Линейные уравнения высших порядков (89). 27. Однородные уравнения второго

порядка с постоянными коэффициентами (91). 28. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами (94). 29. Частные случаи (95). 30. Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами (97). 31. Линейные уравнения и колебательные явления (99). 32. Собственные и вынужденные колебания (101). 33. Синусоидальная внешняя сила и резонанс (104). 34. Внешняя сила типа импульса (108). 35. Внешняя сила, действующая статически (110). 36. Прочность тонкого упругого стержня, сжимаемого продольной силой (113). 37. Вращающийся вал (115). 38. Символический метод (116). 39. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами (119). 40. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами (122). 41. Пример (123). 42. Уравнение Эйлера (124). 43. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (127). 44. Примеры (131).

§ 2. Интегрирование с помощью степенных рядов

45. Интегрирование линейного уравнения с помощью степенного ряда (134). 46. Примеры (137). 47. Разложение решения в обобщенный степенной ряд (139). 48. Уравнение Бесселя (141). 49. Уравнения, приводящиеся к уравнению Бесселя (144).

§ 3. Дополнительные сведения по теории дифференциальных уравнений

50. Метод последовательных приближений для линейных уравнений (146). 51. Случай нелинейного уравнения (154). 52. Особые точки дифференциального уравнения первого порядка (159). 53. Линии тока, коллинеарного плоского движения жидкости (160).

Г л а в а III

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. Кратные интегралы

54. Объемы (168). 55. Двукратный интеграл (172). 56. Вычисление двукратного интеграла (174). 57. Криволинейные координаты (178). 58. Трехкратный интеграл (181). 59. Цилиндрические и сферические координаты (186). 60. Криволинейные координаты в пространстве (191). 61. Основные свойства кратных интегралов (192). 62. Площадь поверхности (193). 63. Интегралы по поверхности и формула Остроградского (196). 64. Интегралы по определенной стороне поверхности (200). 65. Моменты (201).

§ 2. Криволинейные интегралы

66. Определение криволинейного интеграла (206). 67. Работа силового поля. Примеры (210). 68. Площадь и криволинейный интеграл (214). 69. Формула Грина (216). 70. Формула Стокса (219). 71. Независимость криволинейного интеграла от пути на плоскости (222). 72. Случай многосвязной области (226). 73. Независимость криволинейного интеграла от пути в пространстве (229). 74. Установившееся течение жидкости (231). 75. Интегрирующий множитель (233). 76. Уравнение в полных дифференциалах для случая трех переменных (238). 77. Замена переменных в двойном интеграле (239).

§ 3. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра

78. Интегрирование под знаком интеграла (242). 79. Формула Дирихле (244). 80. Дифференцирование под знаком интеграла (247). 81. Примеры (250). 82. Несобственные интегралы (255). 83. Неабсолютно-сходящиеся интегралы (259). 84. Равномерно-сходящиеся интегралы (262). 85. Примеры (266). 86. Несобственные кратные интегралы (269). 87. Примеры (273).

§ 4. Дополнительные сведения по теории кратных интегралов

88. Предварительные понятия (279). 89. Основные теоремы теории множеств (280). 90. Внутренняя и внешняя площади (282). 91. Квадрируемые области (284). 92. Независимость от выбора осей (286). 93. Случай любого числа измерений (287). 94. Теорема Дарбу (288). 95. Интегрируемые функции (290). 96. Свойства интегрируемых функций (291). 97. Вычисление двойного интеграла (292). 98. n -кратные интегралы (294). 99. Примеры (296).

Г л а в а IV

**ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ
И ТЕОРИЯ ПОЛЯ**

100. Сложение и вычитание векторов (298). 101. Умножение вектора на скаляр. Компланарность векторов (300). 102. Разложение вектора по трем некопланарным векторам (301). 103. Скалярное произведение (302). 104. Векторное произведение (304). 105. Соотношения между скалярным и векторным произведениями (307). 106. Распределение скоростей при вращении твердого тела; момент вектора (309). 107. Дифференцирование вектора (310). 108. Скалярное поле и его градиент (312). 109. Векторное поле. Вихрь и расходимость (315).

110. Потенциальное и сепаноидальное поле (319). 111. Направленный элемент поверхности (321). 112. Некоторые формулы векторного анализа (323). 113. Движение твердого тела и малая деформация (324). 114. Уравнение непрерывности (326). 115. Уравнения гидродинамики идеальной жидкости (329). 116. Уравнения распространения звука (330). 117. Уравнение теплопроводности (332). 118. Уравнения Максвелла (34). 119. Выражение оператора Лапласа в ортогональных координатах (337). 120. Операция дифференцирования для случая переменного поля (342).

ГЛАВА V

ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

121. Плоская кривая, ее кривизна и эволюта (348). 122. Эвольвента (354). 123. Естественное уравнение кривой (355). 124. Основные элементы кривой в пространстве (357). 125. Формулы Френе (360). 126. Соприкасающаяся плоскость (361). 127. Винтовые линии (362). 128. Поле единичных векторов (364). 129. Параметрические уравнения поверхности (365). 130. Первая дифференциальная форма Гаусса (367). 131. Вторая дифференциальная форма Гаусса (368). 132. О кривизне линий, начерченных на поверхности (370). 133. Индикатриса Дюпена и формула Эйлера (374). 134. Определение главных радиусов кривизны и главных направлений (376). 135. Линии кривизны (378). 136. Теорема Дюпена (380). 137. Примеры (381). 138. Гауссова кривизна (383). 139. Вариация элемента площади и средняя кривизна (385). 140. Огибающая семейства поверхностей и кривых (388). 141. Развертывающиеся поверхности (391).

ГЛАВА VI

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. Гармонический анализ

142. Ортогональность тригонометрических функций (394). 143. Теорема Дирихле (399). 144. Примеры (401). 145. Разложение в промежутке $(0, \pi)$ (403). 146. Периодические функции периода $2l$ (408). 147. Средняя квадратичная погрешность (410). 148. Общие ортогональные системы функций (415). 149. Практический гармонический анализ (420).

Дополнительные сведения из теории рядов Фурье

150. Разложение в ряд Фурье (425). 151. Вторая теорема о среднем (431). 152. Интеграл Дирихле (435). 153. Теорема Дирихле (439). 154. Прибли-

жение к непрерывной функции полиномами (441). 155. Формула замкнутости (445). 156. Свойства замкнутых систем функций (448). 157. Характер сходимости рядов Фурье (452). 158. Улучшение сходимости рядов Фурье (457). 159. Пример (460).

§ 3. Интеграл Фурье и кратные ряды Фурье

160. Формула Фурье (463). 161. Ряды Фурье в комплексной форме (471). 162. Кратные ряды Фурье (472).

ГЛАВА VII

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Волновое уравнение

163. Уравнение колебаний струны (474). 164. Решение Даламбера (478). 165. Частные случаи (480). 166. Ограниченная струна (485). 167. Способ Фурье (490). 168. Гармоники и стоячие волны (492). 169. Вынужденные колебания (495). 170. Сосредоточенная сила (497). 171. Формула Пуассона (502). 172. Цилиндрические волны (506). 173. Случай n -мерного пространства (508). 174. Неоднородное волновое уравнение (510). 175. Точечный источник (514). 176. Поперечные колебания мембран (515). 177. Прямоугольная мембрана (516). 178. Круглая мембрана (520). 179. Теорема единственности (527). 180. Применение интеграла Фурье (530).

§ 2. Телеграфное уравнение

181. Основные уравнения (532). 182. Установившиеся процессы (533). 183. Устанавливающиеся процессы (536). 184. Примеры (540). 185. Обобщенное уравнение колебаний струны (542). 186. Неограниченная цепь в общем случае (546). 187. Способ Фурье для ограниченной цепи (549). 188. Обобщенное волновое уравнение (553).

§ 3. Колебания стержней

189. Основные уравнения (555). 190. Частные решения (557). 191. Разложение произвольной функции (561).

§ 4. Уравнение Лапласа

192. Гармонические функции (565). 193. Формула Грина (567). 194. Основные свойства гармонических функций (571). 195. Решение задачи

Дирихле для круга (575). **196.** Интеграл Пуассона (579). **197.** Задача Дирихле для сферы (583). **198.** Функция Грина (587). **199.** Случай полупространства (589). **200.** Потенциал объемных масс (590). **201.** Уравнение Пуассона (594). **202.** Формула Кирхгофа (598).

§ 5. Уравнение теплопроводности

203. Основные уравнения (601). **204.** Неограниченный стержень (602). **205.** Стержень, ограниченный с одного конца (607). **206.** Стержень, ограниченный с обоих концов (612). **207.** Дополнительные замечания (614). **208.** Случай сферы (616). **209.** Теорема единственности (618).
Алфавитный указатель 623
