

**Ф. А. Березин**

**Введение  
в суперанализ**

Ф. А. Березин

# **Введение в суперанализ**

Издание второе, исправленное и дополненное

Под редакцией Д. А. Лейтеса

Москва  
Издательство МЦНМО  
2013

УДК 514.74+517.2/.3  
ББК 22.151.5+22.161.1  
Б48

**Ф. А. Березин**

Б48 Введение в суперанализ / Издание второе, исправленное и дополненное. Под ред. Д. А. Лейтеса с дополнениями Д. А. Лейтеса, В. Н. Шандера и И. М. Щепочкиной. — М.: МЦНМО, 2013. — 432 с.  
ISBN 978-4439-0229-6

Теория суперсимметрий — относительно новое направление в математике. Идеи суперсимметрии, появившиеся, чтобы разрешить некоторые проблемы теоретической физики, долго казавшиеся неразрешимыми по определению, быстро выросли в теорию супермногообразий — богатый сплав дифференциальной и алгебраической геометрий с собственными глубокими и недостаточно пока исследованными проблемами.

Незаконченная рукопись погибшего основоположника теории суперсимметрий — Феликса Александровича Березина — еще раз отредактирована и дополнена результатами, полученными за 30 лет, прошедших с момента ее написания, или ссылками на соответствующие результаты. Отмечены также открытые проблемы разного уровня сложности.

В Дополнении публикуются материалы Трудов семинара по суперсимметриям.

Книга будет полезна как научным работникам, так и преподавателям и студентам, — как математикам, так и физикам.

ББК 22.151.5+22.161.1

*Березин Феликс Александрович*

## ВВЕДЕНИЕ В СУПЕРАНАЛИЗ

Под ред. Д. А. Лейтеса

Подписано в печать 16.08.2013 г. Формат 60 × 90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 27. Тираж 1000 экз. Заказ № 3823

Издательство Московского центра непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–74–83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография «Наука»»  
121099, Москва, Шубинский пер., 6

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–72–85.  
E-mail: [biblio@mccme.ru](mailto:biblio@mccme.ru), <http://biblio.mccme.ru>

---

© Березин Ф. А., наследники, 2013

© Лейтес Д. А., 2013

© МЦНМО, 2013

ISBN 978-4439-0229-6

# Оглавление

Предисловие редактора . . . . .	5
Предисловие редактора первого издания . . . . .	12
Предварительные сведения . . . . .	15
<b>Введение. Математические основы суперсимметричных теорий поля</b>	<b>27</b>
<b>1. Линейная алгебра в суперпространствах</b>	<b>55</b>
<b>2. Анализ на суперобластях</b>	<b>92</b>
<b>3. Супермногообразия в целом</b>	<b>113</b>
§1. Супермногообразия . . . . .	113
§2. Конструкции супермногообразий . . . . .	116
§3. Стратификация супермногообразия . . . . .	122
§4. Ретракция и первое препятствие . . . . .	124
§5. Высшие препятствия . . . . .	130
§6. Примеры неретрагируемых супермногообразий . . . . .	132
§7. $\mathbb{Z}_+$ -градуировка и условия простоты супермногообразия . . . . .	133
<b>4. Динамика частицы со спином как пример классической механики на супермногообразиях</b>	<b>137</b>
§1. Введение . . . . .	137
§2. Динамика нерелятивистской частицы со спином . . . . .	141
§3. Релятивистский спин и уравнение Дирака . . . . .	149
§4. Заключительные замечания . . . . .	155
§5. Приложения . . . . .	156
Литература . . . . .	163

## Дополнения. Семинар по суперсимметрии. Том 1 1/2

<b>Д1. Общие сведения: сводка результатов</b>	<b>169</b>
<b>Д2. Супералгебры Ли с матрицей Картана</b>	<b>178</b>
§1. Матрицы Картана . . . . .	178
§2. Графы Дынкина . . . . .	184
§3. Таблицы . . . . .	193
<b>Д3. Векторные супералгебры Ли</b>	<b>214</b>
§1. Введение . . . . .	214
§2. Векторные супералгебры. Стандартная реализация . . . . .	235
§3. Производящие функции . . . . .	237
§4. Бездивергентные подалгебры . . . . .	240

§ 5. Обобщения продолжений Картана . . . . .	241
§ 6. Деформации супералгебры Бюттен . . . . .	244
§ 7. Простые вещественные векторные супералгебры Ли . . . . .	245
§ 8. Струнные супералгебры Ли . . . . .	251
<b>Д4. Супералгебры Пуассона и Бюттен — аналоги общей линейной алгебры. Спинорные и осцилляторные представления</b>	<b>265</b>
§ 1. Введение . . . . .	265
§ 2. Супералгебра Пуассона $po(2n m)$ . . . . .	269
§ 3. Пространство Фока и спинорно-осцилляторные представления . . . . .	272
§ 4. Спинорно-осцилляторные представления . . . . .	274
<b>Д5. Автоморфизмы и вещественные формы (по В. Сергановой)</b>	<b>281</b>
§ 1. Введение . . . . .	281
§ 2. Автоморфизмы простых конечномерных супералгебр Ли . . . . .	284
§ 3. Вещественные структуры простых конечномерных супералгебр Ли . . . . .	292
§ 4. Классификация простых супералгебр петель . . . . .	299
§ 5. Автоморфизмы и вещественные формы струнных супералгебр Ли . . . . .	304
§ 6. Внешние автоморфизмы и вещественные формы супералгебр петель . . . . .	325
§ 7. Симметрические суперпространства . . . . .	336
<b>Д6. Инвариантные многочлены на супералгебрах Ли (по А. Н. Сергееву)</b>	<b>343</b>
§ 1. Введение . . . . .	343
§ 2. Некоторые конструкции с функтором точек . . . . .	353
§ 3. Предварительные результаты . . . . .	357
§ 4. Инвариантные многочлены на супералгебрах Ли . . . . .	363
§ 5. Открытые задачи . . . . .	381
<b>Д7. Инвариантные функции на супермногообразиях суперматриц (В. Шандер)</b>	<b>385</b>
§ 1. Введение . . . . .	385
§ 2. О нормальном виде суперматриц . . . . .	389
§ 3. Инвариантные функции на $\Omega(1)$ и $\text{Odd}(1)$ . . . . .	394
§ 4. Инвариантные функции на $\tilde{C}^{n n}$ . . . . .	397
§ 5. Описание инвариантных функций на $\Omega(n)$ и $\text{Odd}(n)$ . . . . .	408
§ 6. Примеры . . . . .	416
§ 7. Заключение . . . . .	418
Литература к Дополнениям . . . . .	419
Литература, добавленная редактором . . . . .	424
Предметный указатель . . . . .	427