

Г. Л. Бровко

ЭЛЕМЕНТЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АППАРАТА МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ



Г. Л. Бровко

ЭЛЕМЕНТЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АППАРАТА МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Допущено УМО по классическому университетскому
образованию в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
высшего профессионального образования 01.03.03
«Механика и математическое моделирование» и специальности
01.05.01 «Фундаментальная математика и механика»



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2015

УДК 51-7:531/534

ББК 22.1

Б 88

Бровко Г. Л. **Элементы математического аппарата механики сплошной среды.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 424 с. — ISBN 978-5-9221-1634-3.

В пособии сжато изложены сведения из разделов математики, полезные при изучении курса основ механики сплошной среды. Математический аппарат ориентирован на строгое представление основных понятий и законов механики, на аксиоматический подход к изложению курса. Векторы, тензоры и операции над ними даны в прямых (инвариантных) обозначениях, широко применяемых в литературе по механике деформируемых сред.

Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки высшего профессионального образования 01.03.03 «Механика и математическое моделирование» и специальности 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Множества. Упорядоченность. Мера, интегрирование . . .	7
§ 1.1. Множества. Отношения. Упорядоченность	7
1.1.1. Множества. Отображения (7). 1.1.2. Системы множеств (11). 1.1.3. Прямое (декартово) произведение множеств. Операции и от- ношения. Эквивалентность (17). 1.1.4. Упорядоченность. Решетки. Булевы алгебры (20).	
§ 1.2. Мера, интегрирование. Заряд, векторная мера	25
1.2.1. Мера (25). 1.2.2. Измеримые функции (32). 1.2.3. Интеграл Лебега (36). 1.2.4. Заряд. Теорема Радона–Никодима. Векторная мера (38).	
§ 1.3. Замечания	42
Задачи и упражнения	43
Глава 2. Алгебраические системы. Пространства	46
§ 2.1. Классические алгебраические системы	46
2.1.1. Группы (46). 2.1.2. Кольца, модули, алгебры (55). 2.1.3. Пря- мые произведения и прямые суммы алгебраических систем (61).	
§ 2.2. Топологические и метрические пространства	63
2.2.1. Топологические пространства. Гомеоморфизм (63). 2.2.2. Мет- рические пространства (71).	
§ 2.3. Линейные пространства	76
2.3.1. Размерность, базисы (77). 2.3.2. Подпространства, линей- ные многообразия (78). 2.3.3. Фактор-пространства. Прямые сум- мы (80). 2.3.4. Линейные отображения векторных пространств (гомоморфизмы) (83). 2.3.5. Полилинейные отображения (90).	
§ 2.4. Нормированные и евклидовы пространства.	91
2.4.1. Норма и скалярное произведение в линейных простран- ствах (91). 2.4.2. Отображения нормированных пространств. Пре- дел, непрерывность (97). 2.4.3. Непрерывные линейные функцио- налы (99). 2.4.4. Линейные операторы на нормированных простран- ствах (105). 2.4.5. Собственные подпространства и собственные значения операторов (119).	
§ 2.5. Дифференцирование отображений нормированных пространств . . .	128
2.5.1. Малость, порядок контакта функций (128). 2.5.2. Дифферен- цируемость. Производные (129). 2.5.3. Свойства дифференцируе-	

ных функций (133). 2.5.4. Высшие производные. Классы дифференцируемых функций (139).	
§ 2.6. Аффинные пространства	141
2.6.1. Аффинные пары. Присоединенное пространство. Евклидовость (141). 2.6.2. Радиусы-векторы. Линеалы. Биекция множеств точек и радиусов-векторов (142). 2.6.3. Аффинная система координат (142).	
§ 2.7. Многообразия. Дiffeоморфизмы.	143
2.7.1. Понятие многообразия (143). 2.7.2. Тип, размерность многообразия (146). 2.7.3. Подмногообразия, склеивание. Морфизмы многообразий (147). 2.7.4. Произведения многообразий (148). 2.7.5. Чистые многообразия конечной размерности (148). 2.7.6. Примеры многообразий в арифметическом пространстве (150). 2.7.7. Группы Ли (151).	
§ 2.8. Замечания	152
Задачи и упражнения	154
Глава 3. Элементы техники работы с векторами	158
§ 3.1. Векторы и ковекторы евклидовых пространств. Базисы	158
3.1.1. Представление линейных функционалов (158). 3.1.2. Взаимные базисы, компоненты векторов (159).	
§ 3.2. Преобразование базисов. Инвариантность векторов и скаляров	161
3.2.1. Формулы перехода к новому базису (161). 3.2.2. Инвариантность скаляров и векторов (162).	
§ 3.3. Ориентация. Векторное и смешанное произведения	163
3.3.1. Векторное и смешанное произведения (163). 3.3.2. Альтернирующие символы. Символы Леви-Чивиты (164).	
§ 3.4. Векторные процессы. Дифференцирование по параметру	165
Задачи и упражнения	166
Глава 4. Тензоры второго ранга над евклидовым пространством	168
§ 4.1. Определение и основные понятия	168
4.1.1. Линейные операторы и билинейные функционалы. Тензоры второго ранга (168). 4.1.2. Диады. Диадные базисы. Компоненты тензоров (169). 4.1.3. Диадная, индексная и матричная техники работы с тензорами и векторами (173). 4.1.4. Преобразование компонент при замене базисов. Инвариантность тензоров. Собственные и совместные инварианты (175).	
§ 4.2. Операции с тензорами. Инварианты. Тензорные подпространства.	176
4.2.1. Транспонирование. Симметричные и антисимметричные тензоры (176). 4.2.2. След тензора. Шаровые тензоры и девiatorы (179). 4.2.3. Свертки тензора с векторами. Однократная свертка тензоров. Степени тензора (180). 4.2.4. Определитель. Присоединенный тензор. Невырожденность, обратный тензор (181).	

4.2.5. Последовательная и параллельная двукратные свертки. Евклидовость пространства \mathcal{L} (184).	
4.2.6. Некоторые ортогональные подпространства и базисы пространства \mathcal{L} (185).	
§ 4.3. Собственные подпространства и классические инварианты	188
4.3.1. Собственные векторы и собственные значения (188).	
4.3.2. Теорема Кэли–Гамильтона. Выражения и оценки для скалярных инвариантов (192).	
§ 4.4. невырожденные, ортогональные и положительные тензоры.	194
4.4.1. невырожденные тензоры (194).	
4.4.2. Ортогональные тензоры (194).	
4.4.3. Симметричные положительно (неотрицательно) определенные тензоры (195).	
4.4.4. Теорема о полярном разложении (196).	
§ 4.5. Тензорные процессы. Дифференцирование по параметру.	197
Задачи и упражнения.	197
Глава 5. Тензоры произвольных рангов	201
§ 5.1. Тензорное произведение векторных пространств	201
5.1.1. Общее определение. Определяющие соотношения тензорного произведения (201).	
5.1.2. Свойства тензорного произведения. Полиадные базисы (203).	
5.1.3. Представление линейных отображений векторных пространств (205).	
§ 5.2. Тензоры произвольных рангов: общие понятия	208
5.2.1. Тензоры. Типы тензоров. Некоторые интерпретации (208).	
5.2.2. Тензоры-полиады. Базисы, компоненты тензоров (209).	
5.2.3. Операции с тензорами различных типов (211).	
§ 5.3. Тензоры над евклидовым векторным пространством.	218
5.3.1. Определение и интерпретации тензоров над евклидовым векторным пространством (218).	
5.3.2. Полиадные базисы. Компоненты тензоров, опускание и поднятие индексов (220).	
5.3.3. Основные операции над тензорами (224).	
§ 5.4. Совместные свертки тензоров. Линейные отображения ${}^p\mathcal{L}$ в ${}^q\mathcal{L}$. . .	229
5.4.1. Последовательные и параллельные совместные свертки тензоров. Евклидовость пространств ${}^m\mathcal{L}$ (229).	
5.4.2. Линейные отображения ${}^p\mathcal{L}$ в ${}^q\mathcal{L}$ (232).	
§ 5.5. Некоторые тензоры-константы	233
5.5.1. Метрический тензор второго ранга и тензор Леви-Чивиты. Коаксиальность векторов и тензоров второго ранга (233).	
5.5.2. Тензоры-константы четвертого ранга: единичный тензор и тензор транспонирования (235).	
Глава 6. Тензорные функции. Дифференцирование.	239
§ 6.1. Линейные функции	239
6.1.1. Представления линейных функций (239).	
6.1.2. Примеры линейных функций и их представлений (241).	

§ 6.2. Проекторы	243
6.2.1. Проекторы в \mathcal{V} (243). 6.2.2. Проекторы в \mathcal{L} (245).	
§ 6.3. Дифференцирование.	249
6.3.1. Производная отображения линейных пространств (249).	
6.3.2. Производные тензорзначных функций тензорных аргу- ментов (253). 6.3.3. Полиадное представление производных тензорных функций (254). 6.3.4. Производные по направлению (256).	
6.3.5. Дифференцирование произведений и свертков (257).	
§ 6.4. Сложное дифференцирование.	261
6.4.1. Производная композиции отображений линейных про- странств (261). 6.4.2. Производные композиций отображений скаляров, векторов и тензоров второго ранга (262). 6.4.3. Диффе- ренцирование обратных отображений (263).	
§ 6.5. Дифференцирование в подпространствах	263
6.5.1. Дифференцирование функций векторного аргумента (263).	
6.5.2. Дифференцирование функций тензорного аргумента (269).	
§ 6.6. Производные некоторых тензорных функций	273
6.6.1. Производные линейных функций (273). 6.6.2. Производные скалярных инвариантов (275). 6.6.3. Потенциальные зависимости векторов и тензоров (277). 6.6.4. Другие примеры производ- ных (278). 6.6.5. Дифференцирование функций симметричного тензорного аргумента (280).	
§ 6.7. Замечания о высших производных	283
6.7.1. Вторые производные (283). 6.7.2. Квадратичное приближение. Вторая вариация (284).	
Глава 7. Аффинные пространства. Поля, градиенты полей.	286
§ 7.1. Аффинные пространства. Евклидовость.	286
§ 7.2. Поля, градиенты полей. Формулы дифференцирования.	287
7.2.1. Поля над аффинным пространством. Градиенты (287).	
7.2.2. Компоненты градиентов в фиксированных базисах. Формулы дифференцирования (290). 7.2.3. Дифференциальные операторы (293). 7.2.4. Дифференцирование полей с аргументами и значениями в арифметических пространствах (302).	
§ 7.3. Системы координат	304
7.3.1. Система координат. Естественный базис (304). 7.3.2. Виды систем координат (306). 7.3.3. Компоненты векторных и тензорных полей в системе координат (308).	
§ 7.4. Символы Кристоффеля. Ковариантное дифференцирование	309
7.4.1. Градиенты векторов естественного базиса. Символы Кристоф- феля (309). 7.4.2. Ковариантные производные (311). 7.4.3. Пред- ставление дифференциальных операторов в системах коорди- нат (314).	
§ 7.5. Кривые, поверхности и области. Криволинейные и поверхностные интегралы.	315

7.5.1. Кривые. Криволинейные интегралы (316).	7.5.2. Поверхности. Поверхностные интегралы (321).	
§ 7.6. Теоремы Гаусса–Остроградского и Стокса		332
7.6.1. Теорема Гаусса–Остроградского (332).	7.6.2. Теорема Стокса (338).	
§ 7.7. Замечания		342
Задачи и упражнения		343
Глава 8. Инвариантность тензоров и их зависимостей		345
§ 8.1. Действия и представления групп		345
8.1.1. Действие группы на множестве (345).	8.1.2. Действие в топологических пространствах и в многообразиях. Действие на функциях сдвигами аргумента (347).	
8.1.3. Морфизмы действий. Эквивалентность действий (349).	8.1.4. Представление групп в линейных пространствах. Сллетающие операторы (349).	
§ 8.2. Представления групп в тензорах. Обобщенная изотропия		351
8.2.1. Представления групп в тензорах (352).	8.2.2. Морфизмы действий (представлений). $(\mathbf{k}_p, \mathbf{l}_q)$ -изотропия (356).	
8.2.3. Примеры обобщенно изотропных отображений векторов и тензоров второго ранга (359).		
§ 8.3. Инвариантные отображения процессов		364
8.3.1. Действие группы сдвигов временного аргумента. Инвариантность отображений (364).	8.3.2. Параметрическое действие групповых процессов. Морфизмы действия (371).	
8.3.3. Параметрическое \mathbf{K}_m -представление групповых процессов. Усиленная изотропия (375).		
§ 8.4. Линейные сохраняющие отображения матриц		380
8.4.1. Общая постановка задач о сохранении (380).	8.4.2. Некоторые теоремы о сохраняющих отображениях (382).	
§ 8.5. Замечания		385
Список литературы		387
Предметный указатель		391