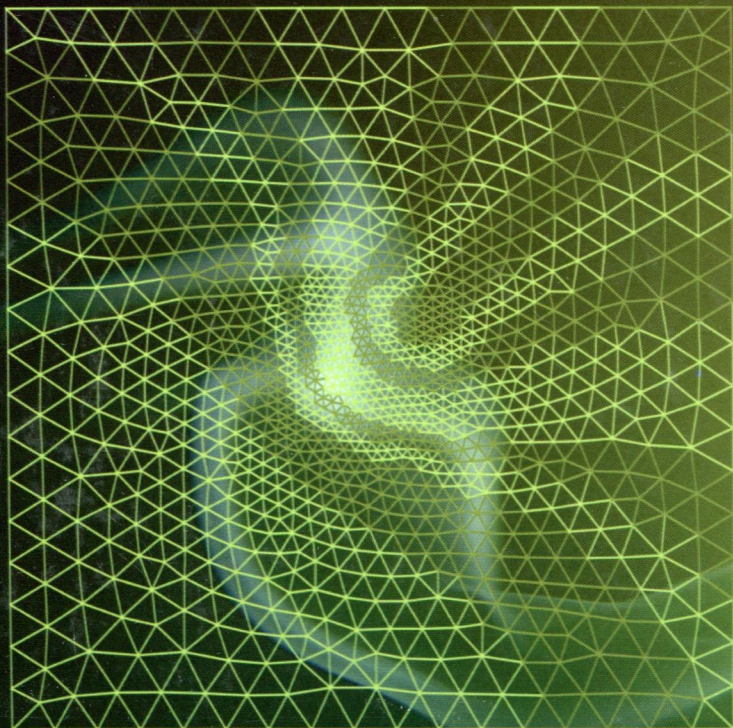


РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ В ЗАДАЧАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ



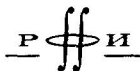
**РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ
В ЗАДАЧАХ ГАЗОВОЙ
ДИНАМИКИ
НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ
СЕТКАХ**

Под редакцией
проф. В.Н. Емельянова
и д.ф.-м.н. К.Н. Волкова



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2014

УДК 532.529
ББК 22.253
Р 17



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 14-08-07010,
не подлежит продаже*

Авторский коллектив:

Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С.,
Тетерина И.В.

Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках / Под ред. проф. В.Н. Емельянова, д.ф.-м.н. К.Н. Волкова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 416 с. — ISBN 978-5-9221-1609-1.

Дается обзор и разрабатываются разностные схемы и численные методы, предназначенные для решения нестационарных задач газовой динамики в областях сложной геометрической конфигурации на неструктурированных сетках. Излагаются вопросы, связанные с построением разностных схем (схемы TVD, ENO и WENO), и обсуждается проблема соотношения между точностью расчетов и порядком аппроксимации разностных схем. Рассматриваются алгоритмические методы повышения точности расчетов, достоинства и недостатки явных и неявных разностных схем, а также особенности их практического применения. Приводится решение ряда задач газовой динамики на неструктурированных сетках.

Для научных работников, занимающихся исследованиями газовой динамики, а также преподавателей, аспирантов и студентов соответствующих специальностей высших учебных заведений.

ISBN 978-5-9221-1609-1

© ФИЗМАТЛИТ, 2014

© Коллектив авторов, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	10
Глава 1. Принципы построения и реализации разностных схем	17
1.1. Сеточные методы и разностные схемы	18
1.1.1. Сетки и сеточные функции	18
1.1.2. Разностная аппроксимация дифференциальных операторов	21
1.1.3. Методы построения разностных схем	22
1.1.4. Операторные методы	25
1.1.5. Примеры разностных схем	28
1.2. Свойства разностных схем	31
1.2.1. Нормы и операторы	31
1.2.2. Сходимость	32
1.2.3. Аппроксимация	33
1.2.4. Устойчивость	35
1.2.5. Связь аппроксимации, устойчивости и сходимости	35
1.2.6. Другие свойства	36
1.3. Дифференциальное приближение разностной схемы	40
1.3.1. Дифференциальное приближение	40
1.3.2. Качественный анализ	42
1.3.3. Разностная схема для уравнения переноса	54
1.3.4. Ошибки численного решения	56
1.4. Устойчивость разностных схем	57
1.4.1. Некоторые математические понятия	57
1.4.2. Спектральный признак устойчивости	58
1.4.3. Уравнение диффузии	59
1.4.4. Устойчивость по начальным данным	61
1.4.5. Условие Куранта–Фридрихса–Леви	64
1.4.6. Различные виды устойчивости	67
1.5. Разностные схемы для гиперболических уравнений	67
1.5.1. Уравнение переноса	68
1.5.2. Волновое уравнение	73
1.5.3. Метод распада разрыва	77
1.6. Разностные схемы для параболических уравнений	83
1.6.1. Особенности параболических задач	83
1.6.2. Метод прогонки	84
1.6.3. Двумерные задачи	86
1.6.4. Метод дробных шагов и схемы расщепления	88
1.6.5. Трехмерные задачи	91
1.6.6. Схемы факторизации	93
1.7. Разностные схемы для эллиптических уравнений	94
1.7.1. Уравнение Пуассона	94

1.7.2. Прямые методы	95
1.7.3. Итерационные методы	97
1.7.4. Методы установления	99
1.7.5. Аппроксимация граничных условий	99
Глава 2. Методы расчета потоков и реконструкции функций	102
2.1. Математическое моделирование в задачах газовой динамики	103
2.2. Численные методы газовой динамики	106
2.3. Методы расчета разрывных решений	112
2.3.1. Методы с выделением разрывов	112
2.3.2. Методы сквозного счета	115
2.4. Решение задачи о распаде произвольного разрыва	121
2.4.1. Формулировка задачи	122
2.4.2. Решение задачи	124
2.4.3. Выбор начального приближения	128
2.4.4. Решения для различных конфигураций	129
2.4.5. Определение решения на разрыве	131
2.4.6. Обобщенная задача Римана	133
2.4.7. Численные методы	134
2.5. Методы, основанные на точном решении задачи Римана	137
2.5.1. Задача Римана	137
2.5.2. Структурированная сетка	138
2.5.3. Неструктурированная сетка	139
2.5.4. Повышение порядка точности	140
2.6. Методы, основанные на приближенных решениях задачи Римана	142
2.6.1. Методы расчета потоков	143
2.6.2. Метод HLL	144
2.6.3. Метод HLLC	145
2.6.4. Метод HLLC	146
2.6.5. Метод WAF	147
2.6.6. Метод Roe	147
2.6.7. Метод Ошера	149
2.7. Реконструкция функций и ограничители	150
2.7.1. TVD-схемы	150
2.7.2. Процедура реконструкции	152
2.7.3. Ограничители наклона	153
2.7.4. Реконструкция в многомерном случае	154
2.7.5. Особенности реализации	155
2.8. Диаграмма нормализованных переменных	156
2.8.1. Разностный шаблон	156
2.8.2. Исходные переменные	158
2.8.3. Нормализованные переменные	158
2.8.4. Выбор формы записи	159
2.8.5. Критерии качества	159
2.8.6. Линейные разностные схемы	163
2.8.7. Нелинейные разностные схемы	167
2.8.8. Семейство карра-схем	177

2.9. Сетка с неравномерным шагом	180
2.9.1. Ограничители потока	180
2.9.2. Нормализованные переменные	181
2.9.3. Условие симметричности	183
2.9.4. Неоднородная сетка	185
2.9.5. Тестовая задача	189
2.10. Неструктурированная сетка	189
2.10.1. Метод обобщения	189
2.10.2. Семейство Гамма-схем	192
2.11. Энтропийная коррекция	194
Глава 3. Построение и реализация разностных схем ENO- и WENO-типа	197
3.1. Дискретизация уравнений газовой динамики	198
3.1.1. Методы дискретизации	198
3.1.2. Конечно-разностные методы	199
3.1.3. Конечно-объемные методы	199
3.1.4. Конечно-элементные методы	199
3.1.5. Спектральные методы	203
3.1.6. Связи между различными подходами	206
3.1.7. Стоимость реализации	206
3.1.8. Построение сетки	208
3.2. Монотонизированные разностные схемы	209
3.3. Схемы ENO и WENO	216
3.3.1. Схемы высокого порядка точности	216
3.3.2. Схемы ENO	218
3.3.3. Схемы WENO	219
3.4. Конечно-разностные и конечно-объемные ENO- и WENO-схемы на структурированных сетках	223
3.4.1. Подход к реализации	223
3.4.2. Обзор разностных схем	223
3.4.3. Реконструкция и аппроксимация в одномерном случае	224
3.4.4. ENO-аппроксимация в одномерном случае	229
3.4.5. WENO-аппроксимация в одномерном случае	233
3.4.6. Скалярные уравнения	236
3.4.7. Системы уравнений	240
3.4.8. Реконструкция и аппроксимация в многомерном случае	243
3.4.9. ENO- и WENO-аппроксимации в многомерном случае	245
3.4.10. ENO- и WENO-схемы в многомерном случае	245
3.4.11. Сравнение конечно-разностной и конечно-объемной дискре- тизации	246
3.5. Дискретизация по времени	247
3.5.1. Методы Рунге–Кутты	247
3.5.2. Многошаговые методы	249
3.5.3. Неявные схемы	250
3.5.4. Методы ускорения	252
3.5.5. Многосеточные методы	252

3.6. Построение реконструкции высокого порядка точности	253
3.6.1. Реконструкция решения	254
3.6.2. Полиномиальная интерполяция	256
3.6.3. Построение шаблона	257
3.6.4. Выбор весовых множителей	260
3.6.5. Интерполяция высокого порядка точности	262
3.7. Реализация конечно-объемной WENO-схемы на треугольной сетке	263
3.7.1. Метод конечных объемов и реконструкция решения	263
3.7.2. Линейная схема 3-го порядка	265
3.7.3. Линейная схема 4-го порядка	267
3.7.4. Схема WENO	268
3.7.5. Индикаторы гладкости и нелинейные весовые множители	269
3.7.6. Особенности реализации	270
3.7.7. Выбор весовых множителей	271
3.7.8. Вычислительные затраты	272
3.7.9. Частный случай	273
Глава 4. Применение неявных разностных схем	277
4.1. Особенности дискретизации	278
4.2. Применение неявных разностных схем и решение системы разностных уравнений	281
4.2.1. Дискретизация по времени	282
4.2.2. Реализация неявных схем	285
4.2.3. Ускорение сходимости	297
4.2.4. Шаг по времени	300
4.2.5. Параллелизация	300
4.3. Неявные схемы приближенной факторизации	301
4.3.1. Особенности реализации	301
4.3.2. Схема с линеаризацией по времени	302
4.3.3. Безытерационные схемы приближенной факторизации	303
4.3.4. Безытерационные схемы приближенной факторизации, использующие характеристические переменные	306
4.3.5. Итерационные схемы приближенной факторизации	307
4.3.6. Расчет производных от вектора потока	311
4.3.7. Определения операторов	312
Глава 5. Результаты численных расчетов	314
5.1. Сходимость и порядок точности	315
5.2. Решение модельных уравнений	316
5.2.1. Уравнение конвективного переноса	317
5.2.2. Уравнение Бюргерса	324
5.3. Одномерные задачи газовой динамики	334
5.3.1. Постановка задачи	334
5.3.2. Обзор задач	335
5.3.3. Решения тестовых задач	337
5.4. Течение в ударной трубе	339
5.5. Течение в канале с сужением	346

5.6. Сверхзвуковое течение в канале со ступенькой	349
5.6.1. Обзор задачи	350
5.6.2. Геометрия и сетка	351
5.6.3. Решение задачи	353
5.7. Отражение ударной волны от стенки	357
5.7.1. Постановка задачи	357
5.7.2. Регулярное отражение	358
5.7.3. Маховское отражение	361
5.8. Взаимодействие отраженной ударной волны с пограничным слоем	367
5.8.1. Обзор задачи	367
5.8.2. Геометрия и сетка	368
5.8.3. Решение задачи	369
5.9. Течение в сопле Лавала	374
5.9.1. Режимы течения	375
5.9.2. Метод предобусловливания	375
5.9.3. Схемы расчета потоков	378
5.10. Сравнение времени счета	380
5.11. Соотношение между точностью расчетов и порядком аппроксимации	381
Заключение	384
Список литературы	386