Университетская серия

12

С. К. Годунов

# ЛЕКЦИИ ПО СОВРЕМЕННЫМ АСПЕКТАМ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ СЕРИЯ Том 12

Основана в 1998 г. издательством "Научная книга" (ИДМИ)

# ЛЕКЦИИ ПО СОВРЕМЕННЫМ АСПЕКТАМ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

С. К. Годунов

Институт математики
им. С.Л. Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия

Новосибирск • Научная книга • 2002

Г59

**Годунов С. К.**

**Г59** Лекции по современным аспектам линейной алгебры — Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002. — 216 с. Ил. — (Университетская серия. Т. 12).

ISBN 5-88119-038-6

Книга следует курсу лекций, прочитанных автором и его коллегами в Новосибирском государственном университете по материалам монографии С. К. Годунова "Современные аспекты линейной алгебры", изданной в оригинале в "Научной книге" (ИДМИ) в 1997 г. и в переводе на английский язык Американским математическим обществом в 1998 г.

Исследования С. К. Годунова по линейной алгебре являются прямым продолжением его работ по вычислительным методам решения прикладных задач математической физики на компьютерах. Для объяснения и понимания причин парадоксов, с которыми по сей день сталкиваются вычислители, потребовалось 35 лет напряженной работы. Данная книга, при сохранении главных идей, изложенных в предшествующей монографии, адаптирована для студентов и читателей с минимальной математической подготовкой: упрощены доказательства, отобран и переформатирован материал, а также добавлен материал (частично в виде задач и упражнений), больше внимание уделено непосредственно вычислительным проблемам.

Для студентов и преподавателей ВУЗов по специальностям алгебра, математический анализ, прикладная математика, информатика и особенно для разработчиков вычислительных алгоритмов.

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 01-01-14039

**ISBN 5-88119-038-6**

# *Содержание*

Лекция 1 ........................................ 1

Евклидово пространство. Унитарные преобразования. Теорема Шура и ее вариант для эрмитовых матриц. Дополнительный материал в задачах. Вариационный принцип Вебера — Рэлея

Лекция 2 ........................................ 15

Теоремы о сингулярном разложении квадратных и прямоугольных матриц, изложенные в виде серии задач. Уравнение Сильвестра, неоднородное и однородное. Разрешимость однородного уравнения Сильвестра. Индуктивное (по размерностям) доказательство критерия разрешимости неоднородного уравнения Сильвестра. Применение уравнения Сильвестра в теореме о подобном приведении матриц к клеточно диагональному виду

Лекция 3 ........................................ 31

Уравнение Ляпунова и гурвицевы матрицы. Схематичное изложение теории устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений. Случай постоянных коэффициентов и построение интегрального представления решения матричного уравнения Ляпунова. Аналог теоремы Ляпунова в случае дискретных векторных последовательностей

Лекция 4 ........................................ 41

Проекторы и их свойства. Проекторы на инвариантные подпространства. Интегральная формула для инвариантного проектора. Дихотомия матричного спектра. Интегральный критерий дихотомии и его обоснование. Круговая дихотомия и оценка соответствующего проектора. Дополнительный материал в задачах

Лекция 5 ........................................ 53

Логарифмическая субгармоничность суммы квадратов модулей аналитических функций и анализ зависимостей $\|(H_R(A)g, g)\|$, $\|H_R(A)\|$, $\operatorname{tr} H_R(A)$ от радиуса $R$. Вариант, применимый для критерия дихотомии прямой $\operatorname{Re}\lambda = a$. Алгебраические уравнения для $H_R(A)$ и $\mathcal{P}_R(A)$. Существование и единственность

Лекция 6 ........ 65

Изучение степеней $A^k$ при известной норме $\|H_R(A)\|$ и оценка элементов клеточно диагонального представления матрицы $A$. Решение матричных уравнений для $H_R(A)$. Дополнительный материал в задачах. Ортогонально степенной $QR$-алгоритм и его сходимость. Лемма, которую можно пропустить. Рекомендуемые компьютерные эксперименты. Ортогональные прогонки. Оценки матричных итераций на инвариантных подпространствах

Лекция 7 ........ 87

Вычислительные парадоксы при расчете собственных значений. Понятие об $\varepsilon$-спектре. Необходимая осторожность при использовании теоремы о непрерывности. Двумерные и одномерные спектральные портреты. Обсуждение теорем Ляпунова об устойчивости решений дифференциальных уравнений. Всегда ли следует ждать, что спектр расслоится на кластеры? Спектры семейств разностных операторов — предшественники $\varepsilon$-спектров

Лекция 8 ........ 107

Отношение Рэлея для не эрмитовых матриц. Область значений (хаусдорфово множество). Теорема Хаусдорфа о выпуклости. Оценки $\|e^{tA}\|$ и $\|(\lambda I - A)^{-1}\|$, вытекающие из рассмотрения области значений. Секториальные операторы. Критерий секториальности. Дополнительный материал в задачах

Лекция 9 ........ 115

Эрмитовы окаймления диагональных матриц. Перемежаемость собственных чисел. Обобщения на окаймления любых эрмитовых матриц. Вариационный принцип Куранта — Фишера. Окаймление прямоугольных матриц и перемежаемость. Неравенство между положительными степенями сингулярных чисел матрицы и ее подматрицы. Неравенства Германа Вейля между собственными и сингулярными числами

Лекция 10 ........ 129

Мажорирующие последовательности и теорема о неравенствах для выпуклых функций. Вывод неравенств между последовательностями собственных значений и сингулярных чисел. Доказательство теоремы о выпуклых функциях. Применение этой теоремы. Как изменяются сингулярные числа при добавлении к матрице слагаемого известного ранга. Вариационный принцип Алахвердиева и его следствия

Лекция 11 ........ 139

Описание аппроксимируемых дифференциальных операторов. Метод слабой аппроксимации для построения их конечномерных моделей. Оценки операторов, секториальность конструируемых моделей. Сравнение сингулярных чисел модельного несамосопряженного оператора с сингулярными числами и собственными значениями самосопряженного оператора. Простейший выбор базисных функций и оценка сингулярных чисел в двумерной модели. Обобщение. Спектральные обусловленности в задачах различных размерностей

Лекция 12 ........ 153

Нормальные операторы. Оценка их резольвенты с учетом малого возмущения. Расслоение спектра. Обсуждение результатов, О расслоении спектра без предположения о "почти нормальности". Элементарное доказательство теоремы Лидского

Лекция 13 ........ 165

Рекуррентные соотношения для определителей главных характеристических миноров трехдиагональных матриц и последовательность Штурма из их отношений. Тригонометрическая параметризация последовательности Штурма. Производные угловых параметров членов последовательности Штурма по коэффициентам рекуррентных соотношений. Теорема Штурма и ее применение в вычислительной практике для указания точных границ собственных значений. Вычисление приближенной последовательности Штурма, ограничивающей сверху (или снизу) точную последовательность. Метод бисекций. Оценка погрешности

Лекция 14 ........ 173

Связь последовательности Штурма с компонентами собственного вектора трехдиагональной матрицы. Пример матрицы с парадоксальной зависимостью крайнего элемента последовательности Штурма от $\lambda$. Двусторонние последовательности Штурма. Использование для их расчета мажорирующих и минорирующих последовательностей. Арифметика "вынесенных порядков". Вычисление компонент собственного вектора и последующая его нормировка. Иллюстративный пример.

Литература ........ 193

Предметный указатель ........ 201