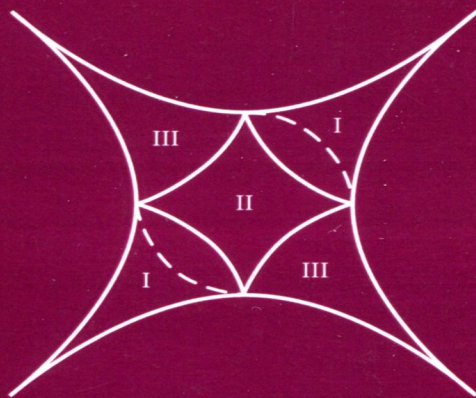


О. В. Холостова

ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ВИБРИРУЮЩИМ ПОДВЕСОМ



УДК 534.1+531.3
ББК 22.323+22.213
Х737

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН Л. Д. Акуленко;

доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической механики Московского физико-технического института (НИУ) Н. И. Амелькин.

Холостова О. В.

X737 Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. — М.–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2016. — 308 с.

ISBN 978-5-4344-0378-8

В монографии излагаются результаты исследования ряда задач динамики тяжелых твердых тел в предположении, что одна из точек (точка подвеса) совершает заданные периодические движения. Рассматриваются как случаи высокочастотных вибраций точки подвеса, так и колебания с произвольной частотой и малой или произвольной амплитудой. Изучаются плоский математический маятник, система двух физических маятников, волчок Лагранжа и твердое тело с произвольной геометрией масс. Используются известные методы исследования гамильтоновых систем с привлечением компьютерных систем аналитических вычислений.

Книга может быть полезна специалистам в области теоретической и прикладной механики, теории нелинейных колебаний, а также аспирантам соответствующих механико-математических специальностей.

ББК 22.323+22.213
УДК 534.1+531.3

ISBN 978-5-4344-0378-8

© О. В. Холостова, 2016

© Ижевский институт компьютерных исследований, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	9
--------------------	---

Часть I. Методы исследования гамильтоновых систем **27**

ГЛАВА 1. Устойчивость гамильтоновых систем	27
§ 1. Постановка задачи	27
§ 2. Устойчивость в линейном приближении	28
2.1. Автономный случай	28
2.2. Неавтономный случай	29
2.3. Области параметрического резонанса	32
§ 3. Нелинейный анализ устойчивости	35
3.1. Неавтономные системы с одной степенью свободы	36
3.1.1. Исследование устойчивости	36
3.1.2. Теорема Мозера об инвариантных кривых	38
3.2. Автономные системы с двумя степенями свободы	40
3.3. Неавтономная система с двумя степенями свободы	42
3.3.1. Устойчивость для большинства начальных условий	43
3.3.2. Формальная устойчивость	43
3.3.3. Случаи резонансов третьего и четвертого порядков	44
ГЛАВА 2. О методах нормализации	47
§ 1. Преобразование Биркгофа	47
§ 2. Метод Депри – Хори	50
2.1. Алгоритм метода Депри – Хори	50
2.2. Пример: нормализация гамильтониана автономной системы с одной степенью свободы	54

Часть II. Некоторые задачи о движении математического маятника с вибрирующей точкой подвеса

58

ГЛАВА 3. О движениях математического маятника с неподвижной точкой подвеса	58
ГЛАВА 4. Движения маятника при горизонтальных колебаниях точки подвеса	61
§ 1. Постановка задачи	61
§ 2. Расщепление сепаратрис и неинтегрируемость уравнения (4.1)	62
§ 3. Периодическое движение, рождающееся из устойчивого положения равновесия. Случай отсутствия резонанса в вынужденных колебаниях	62
3.1. Устойчивость в первом приближении	63
3.2. Нелинейный анализ устойчивости	63
§ 4. Движения маятника в окрестности нижнего положения при резонансе в вынужденных колебаниях	65
4.1. Преобразование гамильтониана	65
4.2. Движения модельной системы	67
4.2.1. Положения равновесия	67
4.2.2. Фазовые портреты	69
4.2.3. Интегрирование модельной системы	71
4.2.4. Проверка невырожденности модельного гамильтониана	73
4.3. О нелинейных колебаниях полной системы. Резонансные периодические движения маятника	75
§ 5. Решения, рождающиеся из неустойчивых положений равновесия	77
§ 6. Периодические движения, рождающиеся из колебаний и вращений, и их устойчивость	79
6.1. Область колебаний	81
6.2. Область вращений	83
ГЛАВА 5. Высокочастотные периодические движения маятника при быстрых вибрациях точки подвеса	85
§ 1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана	85
§ 2. Положения равновесия приближенной системы	90
§ 3. Высокочастотные периодические движения маятника	97

3.1. Существование периодических движений	97
3.2. Исследование устойчивости периодических движений маятника	98

Часть III. Динамика двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса **102**

ГЛАВА 6. О движениях двойного маятника в случае быстрых вертикальных вибраций одной из его точек	102
§ 1. Постановка задачи	102
§ 2. Преобразование гамильтониана	106
§ 3. Условия устойчивости в линейном приближении	108
3.1. Случай $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$	108
3.2. Случаи $\beta = 0$ и $\gamma = 0$	112
3.3. Примеры	113
§ 4. Исследование движений в случае системы двух стержней	115
4.1. Нелинейный анализ устойчивости положений равновесия на вертикали	117
4.2. О существовании и устойчивости других периодических движений	121
ГЛАВА 7. Об устойчивости относительных равновесий на вертикали двойного маятника в случае произвольных амплитуды и частоты вибраций	125
§ 1. Постановка задачи. Гамильтонианы возмущенного движения	125
§ 2. Линейная задача	127
2.1. Случай $0 \leq \beta \ll 1$	128
2.2. Случай произвольных значений параметра β	131
2.3. Значения характеристических показателей в областях устойчивости	135
§ 3. Нелинейный анализ устойчивости	137
3.1. Случаи резонансов четвертого порядка	138
3.2. Исследование устойчивости в точках кратных резонансов четвертого порядка	139
3.3. Нерезонансный случай	145

Часть IV. Динамика волчка Лагранжа с неподвижной и вибрирующей точкой подвеса **146**

ГЛАВА 8. Динамика волчка Лагранжа с неподвижной точкой . . .	146
§ 1. Уравнения движения	146
§ 2. Интегрирование уравнения (8.10)	149
§ 3. Геометрическая интерпретация для случая различных корней функции $f(u)$	153
§ 4. Регулярная прецессия волчка	154
§ 5. Случай $a = b$	159
§ 6. Случай $a = -b$	164
ГЛАВА 9. Уравнения движения волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса	166
ГЛАВА 10. Динамика волчка при колебаниях точки подвеса малой амплитуды	169
§ 1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана	169
§ 2. Нормализация невозмущенного гамильтониана. Проверка условия невырожденности	171
§ 3. Периодические движения волчка при резонансе в вынужденных колебаниях	174
3.1. Построение резонансных кривых	174
3.2. Нормализация возмущенного гамильтониана	178
3.3. Периодические движения волчка и их устойчивость	179
§ 4. Движения волчка при отсутствии резонанса в вынужденных колебаниях	181
4.1. Нерезонансные вынужденные колебания и их устойчивость	183
4.2. Случай параметрического резонанса	184
4.3. Резонанс третьего порядка	186
ГЛАВА 11. Высокочастотные периодические движения, близкие к регулярным прецессиям	190
§ 1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана	190
§ 2. Случай $ \alpha' \neq \beta' $	191
2.1. Приближенная система и ее положения равновесия	191
2.2. О периодических решениях полной системы. Движения, близкие к регулярным прецессиям	197

2.3. Устойчивость движений волчка, близких к регулярным прецессиям	198
§ 3. Случай $\alpha' = \beta'$	203
§ 4. Случай $\alpha' = -\beta'$	209
ГЛАВА 12. «Спящий» волчок Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса	214
§ 1. Постановка задачи	214
§ 2. Устойчивость в линейном приближении	216
§ 3. Анализ устойчивости в областях g_n . Нерезонансный случай	218
§ 4. Устойчивость на кривых резонанса четвертого порядка	222
§ 5. Исследование устойчивости на граничных кривых	225
§ 6. Сравнение с классическим результатом	229

Часть V. Некоторые задачи динамики твердого тела с произвольной геометрией масс при наличии вибраций точки подвеса 231

ГЛАВА 13. Приближенные уравнения движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса	232
---	------------

ГЛАВА 14. Исследование устойчивости относительных равновесий твердого тела с вибрирующей точкой подвеса	240
§ 1. Относительные равновесия на вертикали и их устойчивость	240
§ 2. Боковые равновесия: центр масс тела в главной плоскости инерции	244
2.1. Существование относительных равновесий	244
2.2. Исследование устойчивости	245
§ 3. Боковые равновесия: общий случай геометрии масс тела	247
3.1. Существование относительных равновесий	247
3.2. Исследование устойчивости	251

ГЛАВА 15. Исследование устойчивости перманентных вращений тела вокруг главной оси, содержащей центр масс	256
§ 1. Постановка задачи	256
§ 2. Линейный анализ устойчивости	258
2.1. Случай $s = -1$ (центр масс тела ниже точки подвеса)	259

2.2. Случай $s = 1$ (центр масс тела выше точки подвеса)	260
§ 3. Нелинейный анализ устойчивости	264
§ 4. Некоторые частные случаи	268
4.1. Случай динамической симметрии тела	268
4.2. Случай Бобылева – Стеклова ($\alpha = 2, 2/3 < \beta < 2$)	270
ГЛАВА 16. Исследование устойчивости перманентных вращений	
тела, обусловленных быстрыми вибрациями	272
§ 1. Два типа перманентных вращений тела, обусловленных быст-	
рыми вибрациями	272
1.1. Коническое движение несимметричного тела	272
1.2. Перманентное вращение вокруг главной оси, не содер-	
жащей центр масс тела	273
§ 2. Неустойчивость конического движения несимметричного тела	274
§ 3. Исследование устойчивости перманентного вращения вокруг	
главной оси инерции	276
3.1. Достаточные условия устойчивости	277
3.2. Необходимые условия устойчивости	277
3.3. Нелинейный анализ устойчивости	279
3.4. Результаты нелинейного анализа	281
3.4.1. Случай $\alpha = \beta$ (ось вращения тела совпадает	
с осью динамической симметрии)	282
3.4.2. Случай $\alpha = 1$ (центр масс лежит в главной плос-	
кости инерции, содержащей ось динамической	
симметрии тела)	284
3.4.3. Случай $\beta = 1$ (центр масс находится в экватори-	
альной плоскости инерции тела)	284
3.4.4. Случай $\alpha = 1/2$ ($1/3 \leq \beta \leq 1$)	285
3.4.5. Случай $\alpha = 2$ ($1/2 \leq \beta \leq 2$)	287
Список литературы	289