

В. И. Богачев

---

**СЛАБАЯ  
СХОДИМОСТЬ  
МЕР**

---

**В. И. Богачев**

---

# **СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ МЕР**

---



Москва ♦ Ижевск

2016

УДК 519.21  
ББК 22.171+22.162  
Б73

Интернет-магазин

MAFFESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- робототехника
- нефтегазовые технологии

**Богачев В. И.**

Б73 Слабая сходимость мер. — М.–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2016. — 396 с.

ISBN 978-5-4344-0369-6

Подробно и систематически обсуждаются различные виды сходимости мер, возникающие в теории меры, теории вероятностей, функциональном анализе, дифференциальных уравнениях с частными производными, математической физике и других теоретических и прикладных областях. Особое внимание уделено слабой сходимости мер. Основная часть книги рассчитана на весьма широкий круг читателей, соприкасающихся в своей деятельности со сходимостью по распределению случайных величин и слабой сходимостью мер. Книга содержит необходимый для ее понимания минимум сведений из теории меры и теории функций. Обширный дополнительный материал справочного характера для специалистов включает важнейшие результаты современных исследований. Приведено более 100 задач (от учебных упражнений для начинающих до более трудных задач для квалифицированного читателя) с решениями или указаниями. Даны историко-библиографические комментарии.

Для студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников физико-математических специальностей.

Библ. 647.

**ББК 22.171+22.162**  
**УДК 519.21**

**ISBN 978-5-4344-0369-6**

- © В. И. Богачев, 2016
- © Ижевский институт компьютерных исследований, 2016

# Оглавление

Предисловие	5
<b>Глава 1. Слабая сходимость мер на <math>\mathbb{R}^d</math></b>	<b>9</b>
1.1. Меры и интегралы	9
1.2. Функции ограниченной вариации	22
1.3. Сведения из функционального анализа	27
1.4. Слабая сходимость мер на прямой и на $\mathbb{R}^d$	36
1.5. Слабая сходимость неотрицательных мер	48
1.6. Связь с преобразованием Фурье	50
1.7. Дополнения и задачи	61
Сходимость функций распределения (61). Безгранично делимые и устойчивые распределения (64). Задачи (65).	
<b>Глава 2. Сходимость мер на метрических пространствах</b>	<b>69</b>
2.1. Меры на метрических пространствах	69
2.2. Определение и свойства слабой сходимости	78
2.3. Теорема Прохорова и слабая компактность	88
2.4. Связь со сходимостью на множествах	94
2.5. Случай гильбертова пространства	102
2.6. Представление Скорохода	112
2.7. Дополнения и задачи	117
Равномерная интегрируемость (117). Слабая сходимость сужений и полных вариаций (118). Сходимость произведений (120). Слабая сходимость мер на банаховых пространствах (121). Слабая сходимость в $C$ и $L^p$ (124). Пространство Скорохода (131). Гауссовские меры (132). Принцип инвариантности и броуновский мост (138). Продолжение отображений (140). Задачи (141).	

<b>Глава 3. Метрики на пространствах мер</b>	<b>149</b>
3.1. Слабая топология и метрика Прохорова	149
3.2. Метрики Канторовича и Форте – Мурье	160
3.3. Метрики Канторовича порядка $p$	172
3.4. Метрические тройки Громова	178
3.5. Дополнения и задачи	183
Метрики Золотарева (183). Нижние оценки нормы Канторовича в классах Никольского – Бесова (184). Продолжение метрик (190). Сближающиеся последовательности (191). Задачи (193).	
<b>Глава 4. Сходимость мер на топологических пространствах</b>	<b>197</b>
4.1. Борелевские, бэровские и радоновские меры	197
4.2. Слабая топология	207
4.3. Случай вероятностных мер	210
4.4. Результаты А. Д. Александрова	220
4.5. Слабая компактность	228
4.6. Преобразование Фурье и слабая сходимость	238
4.7. Пространства Прохорова	244
4.8. Дополнения и задачи	254
Компактность в пространстве знакопеременных мер (254). Еще о прохоровских и александровских пространствах (258). Центральная предельная теорема (268). Сдвиг-компактность и суммы независимых случайных элементов (273). Задачи (277).	
<b>Глава 5. Пространства мер со слабой топологией</b>	<b>285</b>
5.1. Свойства пространств мер	285
5.2. Отображения пространств мер	293
5.3. Непрерывные обратные отображения	299
5.4. Пространства со свойством Скорохода	303
5.5. Равномерно распределенные последовательности	315
5.6. Сходимость мер на множествах	320
5.7. Меры Янга и $ws$ -топология	329
5.8. Дополнения и задачи	334
Сепарабельность пространств мер (334). Измеримость на пространствах мер (336). Слабая секвенциальная полнота (341). $A$ -топология (341). Задачи (344).	
Комментарии	351
Список литературы	359
Предметный указатель	391