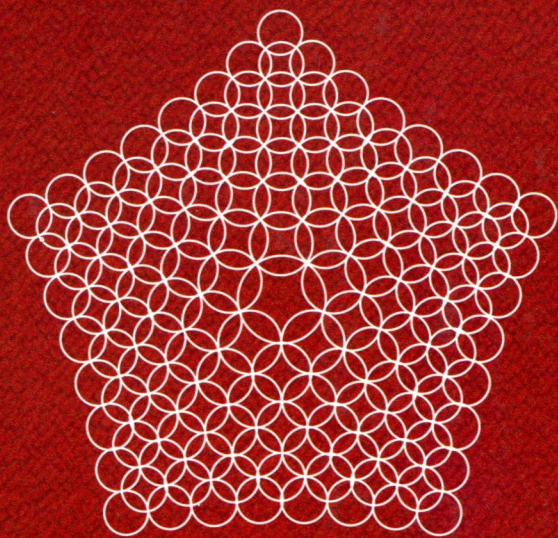


А. И. Бобенко, Ю. Б. Сурис

Дискретная дифференциальная геометрия

ИНТЕГРИРУЕМАЯ СТРУКТУРА



А.И. Бобенко, Ю.Б. Сурис

**Дискретная
дифференциальная
геометрия**

Интегрируемая структура

Перевод с английского В.Э. Адлера



Москва ♦ Ижевск

2010

УДК 514.7+514.1+517.9

ББК 22.151

22.161.6

Интернет-магазин

MAHESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
 - математика
 - биология
 - нефтегазовые технологии
-

Бобенко А.И., Сурис Ю.Б.

Дискретная дифференциальная геометрия. Интегрируемая структура. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. — xxvi+488 с.

Дискретная дифференциальная геометрия возникла и развивается на стыке дифференциальной и дискретной геометрии. Её целью является разработка разностных эквивалентов понятий и методов классической теории поверхностей. Последняя воспроизводится в результате непрерывного предела. Интерес к дискретной дифференциальной геометрии обусловлен не только её важностью для чистой математики, но также и её актуальностью для приложений в компьютерной графике, теоретической физике, архитектуре и численных методах. Недавний прогресс в дискретной дифференциальной геометрии привёл не только к дискретизации большого числа классических результатов, но также и к лучшему пониманию фундаментальных структур, лежащих в основе классической дифференциальной геометрии и теории интегрируемых систем. Настоящая книга даёт систематическое изложение современных достижений в этой области.

ISBN 978-5-93972-798-3

ББК 22.151, 22.161.6

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 09-01-07115.

© А.И. Бобенко, Ю.Б. Сурис, 2010

© Ижевский институт компьютерных исследований, 2010

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

ИНСТИТУТ

Оглавление

Предисловие	xi
Введение	xii
ГЛАВА 1. Классическая дифференциальная геометрия	1
1.1. Сопряжённые сети	2
1.1.1. Определение сопряжённых сетей	2
1.1.2. Альтернативное аналитическое описание сопряжённых сетей	4
1.1.3. Преобразования сопряжённых сетей	5
1.1.4. Классическая формулировка F-преобразования	7
1.2. Сети Кёнигса и Мутара	8
1.2.1. Определение сетей Кёнигса и Мутара	8
1.2.2. Преобразования сетей Кёнигса и Мутара	11
1.2.3. Классическая формулировка преобразования Мутара	12
1.3. Асимптотические сети	13
1.4. Ортогональные сети	15
1.4.1. Определение ортогональных сетей	15
1.4.2. Аналитическое описание ортогональных сетей	17
1.4.3. Спинорные реперы ортогональных сетей	18
1.4.4. Кривизны поверхностей и поверхности, параметризованные линиями кривизны	20
1.4.5. Преобразование Рибокура ортогональных сетей	22
1.5. Сферические конгруэнции с главной параметризацией	24
1.6. Поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны	25
1.7. Изотермические поверхности	28
1.8. Поверхности постоянной средней кривизны	33
1.9. Библиографический комментарий	35

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 2. Принципы дискретизации. Многомерные сети .	38
2.1. Дискретные сопряженные сети (Q-сети)	39
2.1.1. Определение и совместность Q-сетей	39
2.1.2. Преобразования Q-сетей	46
2.1.3. Альтернативное аналитическое описание Q-сетей .	48
2.1.4. Непрерывный предел	51
2.2. Дискретные конгруэнции прямых	52
2.3. Дискретные сети Кёнигса и Мутара	57
2.3.1. Определение дуальных четырёхугольников	57
2.3.2. Определение дискретных кёнигсовых сетей	60
2.3.3. Геометрическая характеристика двумерных дискретных кёнигсовых сетей	65
2.3.4. Геометрическая характеристика трёхмерных дискретных кёнигсовых сетей	68
2.3.5. Функция ν и дуальность Кристоффеля	70
2.3.6. Мутаровский представитель дискретной кёнигсово-вой сети	72
2.3.7. Непрерывный предел	73
2.3.8. Определение и совместность T-сетей	74
2.3.9. Преобразования T-сетей	77
2.3.10. Дискретные M-сети	78
2.4. Дискретные асимптотические сети	80
2.4.1. Определение и совместность дискретных асимптотических сетей	80
2.4.2. Дискретное представление Лелёвра	85
2.4.3. Преобразования дискретных A-сетей	87
2.5. Упражнения	88
2.6. Библиографический комментарий	99
ГЛАВА 3. Принципы дискретизации. Сети на квадратах .	103
3.1. Циркулярные сети	104
3.1.1. Определение и совместность	104
3.1.2. Преобразования циркулярных сетей	109
3.1.3. Аналитическое описание циркулярных сетей	110
3.1.4. Описание циркулярных сетей в геометрии Мёбиуса .	114
3.2. Q-сети на квадратах	117
3.3. Дискретные конгруэнции прямых на квадратах	120
3.4. Конические сети	122
3.5. Сети главных контактных элементов	126
3.6. Q-конгруэнции сфер	131

ОГЛАВЛЕНИЕ

3.7.	Рибокуровские конгруэнции сфер	135
3.8.	Параметризация дискретными линиями кривизны в геометриях Ли, Мёбиуса и Лагерра	137
3.9.	Дискретные асимптотические сети в плюккеровой геометрии прямых	142
3.10.	Упражнения	144
3.11.	Библиографический комментарий	148
ГЛАВА 4. Специальные классы дискретных поверхностей		151
4.1.	Дискретные сети Мутара на квадриках	151
4.2.	Дискретные К-сети	155
4.2.1.	Определение дискретной К-сети	155
4.2.2.	Преобразование Бэклунда	158
4.2.3.	Уравнение Хироты	159
4.2.4.	Дискретное представление нулевой кривизны	165
4.2.5.	Дискретные К-поверхности	166
4.2.6.	Дискретное уравнение синус-Гордона	170
4.3.	Дискретные изотермические сети	174
4.3.1.	Определение дискретной изотермической сети	174
4.3.2.	Характеризация дискретных изотермических сетей посредством двойного отношения	176
4.3.3.	Преобразование Дарбу дискретных изотермических сетей	181
4.3.4.	Метрика дискретной изотермической сети	182
4.3.5.	Мутаровские представители дискретных изотермических сетей	185
4.3.6.	Двойственность Кристоффеля для дискретных изотермических сетей	187
4.3.7.	3D-совместность и представление нулевой кривизны	189
4.3.8.	Непрерывный предел	192
4.4.	S-изотермические сети	193
4.5.	Дискретные поверхности постоянной кривизны	204
4.5.1.	Параллельные дискретные поверхности и конгруэнции прямых	204
4.5.2.	Многоугольники с параллельными сторонами и ориентированная площадь	204
4.5.3.	Кривизна полиэдральной поверхности с параллельным гауссовым отображением	208
4.5.4.	Q-сети постоянной кривизны	210
4.5.5.	Кривизна сетей главных контактных элементов	213

ОГЛАВЛЕНИЕ

4.5.6. Циркулярные минимальные сети и сети постоянной средней кривизны	214
4.6. Упражнения	216
4.7. Библиографический комментарий	221
ГЛАВА 5. Аппроксимация	225
5.1. Дискретные гиперболические системы	225
5.2. Аппроксимация дискретных гиперболических систем	229
5.3. Сходимость Q -сетей	236
5.4. Сходимость дискретных сетей Мутара	238
5.5. Сходимость дискретных асимптотических сетей	240
5.6. Сходимость циркулярных сетей	241
5.7. Сходимость дискретных K -поверхностей	247
5.8. Упражнения	248
5.9. Библиографический комментарий	249
ГЛАВА 6. Совместность как интегрируемость	251
6.1. Непрерывные интегрируемые системы	252
6.2. Дискретные интегрируемые систем	255
6.3. Дискретные двумерные интегрируемые системы на графах	258
6.4. Дискретные уравнения типа Лапласа	260
6.5. Квад-графы	262
6.6. Трёхмерная совместность	264
6.7. От 3D-совместности к представлениям нулевой кривизны и преобразованиям Бэклунда	266
6.8. Геометрия граничных задач для интегрируемых двумерных уравнений	273
6.8.1. Задача с начальными данными	273
6.8.2. Продолжение на многомерную решётку	277
6.9. 3D-совместные уравнения с некоммутативными полями	283
6.10. Классификация дискретных интегрируемых двумерных систем с полями в вершинах. I	286
6.11. Доказательство классификационной теоремы	291
6.11.1. 3D-совместные системы, биквадратики и свойство тетраэдральности	291
6.11.2. Анализ: спуск от мультиаффинного Q к многочлену r четвёртой степени	294
6.11.3. Синтез: подъём от многочлена r четвёртой степени к биквадратике h	297

ОГЛАВЛЕНИЕ

6.11.4. Синтез: подъём от биквадратик h^{ij} к мультиаффинуму Q	299
6.11.5. Размещение уравнений $Q = 0$ на кубе	301
6.12. Классификация дискретных интегрируемых двумерных систем с полями в вершинах. II	303
6.13. Интегрируемые дискретные уравнения типа Лапласа	308
6.14. Поля на рёбрах: отображения Янга-Бакстера	313
6.15. Классификация отображений Янга-Бакстера	320
6.16. Дискретные интегрируемые трёхмерные системы	327
6.16.1. Поля на двумерных гранях.	328
6.16.2. Поля в вершинах.	333
6.17. Упражнения	336
6.18. Библиографический комментарий	344
ГЛАВА 7. Дискретный комплексный анализ. Линейная теория	350
7.1. Основные понятия дискретного комплексного анализа	350
7.2. Преобразование Мутара для дискретных уравнений Коши-Римана	354
7.3. Интегрируемые дискретные уравнения Коши-Римана	357
7.4. Дискретные экспоненциальные функции	361
7.5. Дискретная логарифмическая функция	363
7.6. Упражнения	369
7.7. Библиографический комментарий	370
ГЛАВА 8. Дискретный комплексный анализ. Интегрируемые конгруэнции окружностей	372
8.1. Конгруэнции окружностей	372
8.2. Интегрируемые системы двойного отношения и Хироты	375
8.3. Интегрируемые конгруэнции окружностей	378
8.4. Конгруэнции окружностей z^a и $\log z$	382
8.5. Линеаризация	387
8.6. Упражнения	390
8.7. Библиографический комментарий	391
ГЛАВА 9. Основания	394
9.1. Проективная геометрия	394
9.2. Геометрия Ли	399
9.2.1. Объекты геометрии Ли	399
9.2.2. Проективная модель геометрии Ли	400

ОГЛАВЛЕНИЕ

9.2.3.	Сферические преобразования Ли	404
9.2.4.	Планарные семейства сфер; циклиды Дюпена	404
9.3.	Геометрия Мёбиуса	406
9.3.1.	Объекты геометрии Мёбиуса	406
9.3.2.	Проективная модель геометрии Мёбиуса	409
9.3.3.	Преобразования Мёбиуса	415
9.4.	Лагеррова геометрия	417
9.5.	Плюккерова геометрия прямых	420
9.6.	Теоремы инцидентности	426
9.6.1.	Теоремы Менелая и Чевы	426
9.6.2.	Обобщённая теорема Менелая	428
9.6.3.	Теорема Дезарга	430
9.6.4.	Четырёхвершинные множества точек на прямой	432
9.6.5.	Теоремы Карно и Паскаля	434
9.6.6.	Теорема Брианшона	437
9.6.7.	Теорема Микеля	437
Приложение. Решения избранных упражнений		439
A.1.	Решения упражнений к Главе 2	439
A.2.	Решения упражнений к Главе 3	447
A.3.	Решения упражнений к Главе 4	448
A.4.	Решения упражнений к Главе 6	454
Литература		459
Предметный указатель		482