

Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

КУРС

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО

И ИНТЕГРАЛЬНОГО

ИСЧИСЛЕНИЯ

Том I

Г.М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

КУРС  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО  
И ИНТЕГРАЛЬНОГО  
ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ I

ИЗДАНИЕ ВОСЬМОЕ

*Рекомендовано Министерством образования  
Российской Федерации в качестве учебника  
для студентов физических и механико-математических  
специальностей высших учебных заведений*



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ



МОСКВА  
Лаборатория 3

2003

УДК 517.2  
ББК 22.161  
Ф65

**Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 1 / Пред. и прим. А. А. Флоринского. — 8-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, Лаборатория Знаний, 2003. — 680 с. — ISBN 5-9221-0436-5.**

Фундаментальный учебник по математическому анализу, выдержавший множество изданий и переведенный на ряд иностранных языков, отличается, с одной стороны, систематичностью и строгостью изложения, а с другой — простым языком, подробными пояснениями и многочисленными примерами, иллюстрирующими теорию.

«Курс...» предназначен для студентов университетов, педагогических и технических вузов и уже в течение длительного времени используется в различных учебных заведениях в качестве одного из основных учебных пособий. Он позволяет учащемуся не только овладеть теоретическим материалом, но и получить наиболее важные практические навыки. «Курс...» высоко ценится математиками как уникальная коллекция различных фактов анализа, часть которых невозможно найти в других книгах на русском языке.

Первое издание вышло в 1948 г.

Редактор: доцент матем.-механич. ф-та  
Санкт-Петербургского гос. ун-та *А. А. Флоринский*

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора . . . . .	11
---------------------------------	----

### Введение ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

<b>§ 1. Область рациональных чисел</b>	
1. Предварительные замечания . . . . .	13
2. Упорядочение области рациональных чисел . . . . .	14
3. Сложение и вычитание рациональных чисел . . . . .	15
4. Умножение и деление рациональных чисел . . . . .	17
5. Аксиома Архимеда . . . . .	19
<b>§ 2. Введение иррациональных чисел. Упорядочение области вещественных чисел</b>	
6. Определение иррационального числа . . . . .	20
7. Упорядочение области вещественных чисел . . . . .	23
8. Вспомогательные предложения . . . . .	24
9. Представление вещественного числа бесконечной десятичной дробью . . . . .	25
10. Непрерывность области вещественных чисел . . . . .	28
11. Границы числовых множеств . . . . .	30
<b>§ 3. Арифметические действия над вещественными числами</b>	
12. Определение суммы вещественных чисел . . . . .	33
13. Свойства сложения . . . . .	34
14. Определение произведения вещественных чисел . . . . .	36
15. Свойства умножения . . . . .	38
16. Заключение . . . . .	40
17. Абсолютные величины . . . . .	40
<b>§ 4. Дальнейшие свойства и приложения вещественных чисел</b>	
18. Существование корня. Степень с рациональным показателем . . . . .	41
19. Степень с любым вещественным показателем . . . . .	43
20. Логарифмы . . . . .	46
21. Измерение отрезков . . . . .	47

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Глава первая ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

<b>§ 1. Варианта и ее предел</b>	
22. Переменная величина, варианта . . . . .	50
23. Предел варианты . . . . .	54
24. Бесконечно малые величины . . . . .	55
25. Примеры . . . . .	57
26. Некоторые теоремы о варианте, имеющей предел . . . . .	61
27. Бесконечно большие величины . . . . .	63
<b>§ 2. Теоремы о пределах, облегчающие нахождение пределов</b>	
28. Предельный переход в равенстве и неравенстве . . . . .	65
29. Леммы о бесконечно малых . . . . .	67
30. Арифметические операции над переменными . . . . .	68
31. Неопределенные выражения . . . . .	70
32. Примеры на нахождение пределов . . . . .	73
33. Теорема Штольца и ее применения . . . . .	78
<b>§ 3. Монотонная варианта</b>	
34. Предел монотонной варианты . . . . .	81
35. Примеры . . . . .	83
36. Число $e$ . . . . .	88
37. Приближенное вычисление числа $e$ . . . . .	90
38. Лемма о вложенных промежутках . . . . .	94
<b>§ 4. Принцип сходимости. Частичные пределы</b>	
39. Принцип сходимости . . . . .	96
40. Частичные последовательности и частичные пределы . . . . .	99
41. Лемма Больцано – Вейерштрасса . . . . .	101
42. Наибольший и наименьший пределы . . . . .	103

### Глава вторая ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

<b>§ 1. Понятие функции</b>	
43. Переменная и область ее изменения . . . . .	107
44. Функциональная зависимость между переменными. Примеры . . . . .	108
45. Определение понятия функции . . . . .	110
46. Аналитический способ задания функции . . . . .	113
47. График функции . . . . .	116
48. Важнейшие классы функций . . . . .	118
49. Понятие обратной функции . . . . .	124
50. Обратные тригонометрические функции . . . . .	126
51. Суперпозиция функций. Заключительные замечания . . . . .	131
<b>§ 2. Предел функции</b>	
52. Определение предела функции . . . . .	132
53. Сведение к случаю варианты . . . . .	134
54. Примеры . . . . .	137
55. Распространение теории пределов . . . . .	145
56. Примеры . . . . .	148

## ОГЛАВЛЕНИЕ

57.	Предел монотонной функции . . . . .	151
58.	Общий признак Больцано–Коши . . . . .	152
59.	Наибольший и наименьший пределы функции . . . . .	154
<b>§ 3.</b>	<b>Классификация бесконечно малых и бесконечно больших величин</b>	
60.	Сравнение бесконечно малых . . . . .	154
61.	Шкала бесконечно малых . . . . .	156
62.	Эквивалентные бесконечно малые . . . . .	157
63.	Выделение главной части . . . . .	159
64.	Задачи . . . . .	161
65.	Классификация бесконечно больших . . . . .	163
<b>§ 4.</b>	<b>Непрерывность (и разрывы) функций</b>	
66.	Определение непрерывности функции в точке . . . . .	164
67.	Арифметические операции над непрерывными функциями . . . . .	167
68.	Примеры непрерывных функций . . . . .	167
69.	Односторонняя непрерывность. Классификация разрывов . . . . .	169
70.	Примеры различных функций . . . . .	171
71.	Непрерывность и разрывы монотонной функции . . . . .	173
72.	Непрерывность элементарных функций . . . . .	174
73.	Суперпозиция непрерывных функций . . . . .	175
74.	Решение одного функционального уравнения . . . . .	176
75.	Функциональная характеристика показательной, логарифмической и степенной функций . . . . .	178
76.	Функциональная характеристика тригонометрического и гиперболического косинусов . . . . .	180
77.	Использование непрерывности функций для вычисления пределов . . . . .	182
78.	Степенно-показательные выражения . . . . .	185
79.	Примеры . . . . .	186
<b>§ 5.</b>	<b>Свойства непрерывных функций</b>	
80.	Теорема об обращении функции в нуль . . . . .	188
81.	Применение к решению уравнений . . . . .	190
82.	Теорема о промежуточном значении . . . . .	191
83.	Существование обратной функции . . . . .	193
84.	Теорема об ограниченности функции . . . . .	195
85.	Наибольшее и наименьшее значения функции . . . . .	196
86.	Понятие равномерной непрерывности . . . . .	199
87.	Теорема Кантора . . . . .	201
88.	Лемма Бореля . . . . .	202
89.	Новые доказательства основных теорем . . . . .	204

## Глава третья

### ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

#### § 1. Производная и ее вычисление

90.	Задача о вычислении скорости движущейся точки . . . . .	208
91.	Задача о проведении касательной к кривой . . . . .	209
92.	Определение производной . . . . .	212
93.	Примеры вычисления производных . . . . .	216

## ОГЛАВЛЕНИЕ

94.	Производная обратной функции . . . . .	219
95.	Сводка формул для производных . . . . .	221
96.	Формула для приращения функции . . . . .	222
97.	Простейшие правила вычисления производных . . . . .	223
98.	Производная сложной функции . . . . .	226
99.	Примеры . . . . .	227
100.	Односторонние производные . . . . .	234
101.	Бесконечные производные . . . . .	235
102.	Дальнейшие примеры особых случаев . . . . .	236
<b>§ 2.</b>	<b>Дифференциал</b>	
103.	Определение дифференциала . . . . .	237
104.	Связь между дифференцируемостью и существованием производной . . . . .	238
105.	Основные формулы и правила дифференцирования . . . . .	241
106.	Инвариантность формы дифференциала . . . . .	242
107.	Дифференциалы как источник приближенных формул . . . . .	245
108.	Применение дифференциалов при оценке погрешностей . . . . .	247
<b>§ 3.</b>	<b>Основные теоремы дифференциального исчисления</b>	
109.	Теорема Ферма . . . . .	249
110.	Теорема Дарбу . . . . .	251
111.	Теорема Ролля . . . . .	252
112.	Формула Лагранжа . . . . .	253
113.	Предел производной . . . . .	256
114.	Формула Коши . . . . .	257
<b>§ 4.</b>	<b>Производные и дифференциалы высших порядков</b>	
115.	Определение производных высших порядков . . . . .	259
116.	Общие формулы для производных любого порядка . . . . .	261
117.	Формула Лейбница . . . . .	265
118.	Примеры . . . . .	267
119.	Дифференциалы высших порядков . . . . .	270
120.	Нарушение инвариантности формы для дифференциалов высших порядков . . . . .	271
121.	Параметрическое дифференцирование . . . . .	273
122.	Конечные разности . . . . .	274
<b>§ 5.</b>	<b>Формула Тейлора</b>	
123.	Формула Тейлора для многочлена . . . . .	276
124.	Разложение произвольной функции; дополнительный член в форме Пеано . . . . .	278
125.	Примеры . . . . .	282
126.	Другие формы дополнительного члена . . . . .	286
127.	Приближенные формулы . . . . .	289
<b>§ 6.</b>	<b>Интерполирование</b>	
128.	Простейшая задача интерполирования. Формула Лагранжа . . . . .	295
129.	Дополнительный член формулы Лагранжа . . . . .	297
130.	Интерполирование с кратными узлами. Формула Эрмита . . . . .	298

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Глава четвертая ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

<b>§ 1. Изучение хода изменения функции</b>	
131. Условие постоянства функции	301
132. Условие монотонности функции	303
133. Доказательство неравенств	306
134. Максимумы и минимумы; необходимые условия	310
135. Достаточные условия. Первое правило	312
136. Примеры	314
137. Второе правило	318
138. Использование высших производных	320
139. Разыскание наибольших и наименьших значений	323
140. Задачи	324
<b>§ 2. Выпуклые (и вогнутые) функции</b>	
141. Определение выпуклой (вогнутой) функции	329
142. Простейшие предложения о выпуклых функциях	330
143. Условия выпуклости функции	333
144. Неравенство Иенсена и его приложения	336
145. Точки перегиба	338
<b>§ 3. Построение графиков функций</b>	
146. Постановка задачи	341
147. Схема построения графика. Примеры	342
148. Бесконечные разрывы, бесконечный промежуток. Асимптоты	344
149. Примеры	348
<b>§ 4. Раскрытие неопределенностей</b>	
150. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$	351
151. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$	357
152. Другие виды неопределенностей	359
<b>§ 5. Приближенное решение уравнений</b>	
153. Вводные замечания	361
154. Правило пропорциональных частей (метод хорд)	362
155. Правило Ньютона (метод касательных)	366
156. Примеры и упражнения	368
157. Комбинированный метод	373
158. Примеры и упражнения	374

### Глава пятая ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

<b>§ 1. Основные понятия</b>	
159. Функциональная зависимость между переменными. Примеры	378
160. Функции двух переменных и области их определения	379
161. Арифметическое $n$ -мерное пространство	383



162.	Примеры областей в $n$ -мерном пространстве . . . . .	387
163.	Общее определение открытой и замкнутой области . . . . .	389
164.	Функции $n$ переменных . . . . .	392
165.	Предел функции нескольких переменных . . . . .	395
166.	Сведение к случаю варианты . . . . .	397
167.	Примеры . . . . .	399
168.	Повторные пределы . . . . .	401
<b>§ 2. Непрерывные функции</b>		
169.	Непрерывность и разрывы функций нескольких переменных . . . . .	404
170.	Операции над непрерывными функциями . . . . .	406
171.	Функции, непрерывные в области. Теоремы Больцано – Коши . . . . .	407
172.	Лемма Больцано – Вейерштрасса . . . . .	409
173.	Теоремы Вейерштрасса . . . . .	412
174.	Равномерная непрерывность . . . . .	413
175.	Лемма Бореля . . . . .	415
176.	Новые доказательства основных теорем . . . . .	417
<b>§ 3. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных</b>		
177.	Частные производные и частные дифференциалы . . . . .	419
178.	Полное приращение функции . . . . .	422
179.	Полный дифференциал . . . . .	426
180.	Геометрическая интерпретация для случая функции двух переменных . . . . .	428
181.	Производные от сложных функций . . . . .	432
182.	Примеры . . . . .	434
183.	Формула конечных приращений . . . . .	436
184.	Производная по заданному направлению . . . . .	438
185.	Инвариантность формы (первого) дифференциала . . . . .	441
186.	Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях . . . . .	443
187.	Однородные функции . . . . .	446
188.	Формула Эйлера . . . . .	448
<b>§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков</b>		
189.	Производные высших порядков . . . . .	449
190.	Теорема о смешанных производных . . . . .	452
191.	Обобщение . . . . .	456
192.	Производные высших порядков от сложной функции . . . . .	458
193.	Дифференциалы высших порядков . . . . .	459
194.	Дифференциалы сложных функций . . . . .	464
195.	Формула Тейлора . . . . .	465
<b>§ 5. Экстремумы, наибольшие и наименьшие значения</b>		
196.	Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимые условия . . . . .	468
197.	Достаточные условия (случай функции двух переменных) . . . . .	470
198.	Достаточные условия (общий случай) . . . . .	475

199. Условия отсутствия экстремума . . . . .	478
200. Наибольшее и наименьшее значения функции. Примеры . . . . .	480
201. Задачи . . . . .	484

## Глава шестая

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ; ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

<b>§ 1. Формальные свойства функциональных определителей</b>	
202. Определение функциональных определителей (якобианов) . . . . .	494
203. Умножение якобианов . . . . .	495
204. Умножение функциональных матриц (матриц Якоби) . . . . .	497
<b>§ 2. Неявные функции</b>	
205. Понятие неявной функции от одной переменной . . . . .	500
206. Существование неявной функции . . . . .	502
207. Дифференцируемость неявной функции . . . . .	505
208. Неявные функции от нескольких переменных . . . . .	507
209. Вычисление производных неявных функций . . . . .	515
210. Примеры . . . . .	519
<b>§ 3. Некоторые приложения теории неявных функций</b>	
211. Относительные экстремумы . . . . .	524
212. Метод неопределенных множителей Лагранжа . . . . .	527
213. Достаточные для относительного экстремума условия . . . . .	529
214. Примеры и задачи . . . . .	530
215. Понятие независимости функций . . . . .	535
216. Ранг матрицы Якоби . . . . .	537
<b>§ 4. Замена переменных</b>	
217. Функции одной переменной . . . . .	542
218. Примеры . . . . .	544
219. Функции нескольких переменных. Замена независимых переменных . . . . .	547
220. Метод вычисления дифференциалов . . . . .	549
221. Общий случай замены переменных . . . . .	550
222. Примеры . . . . .	553

## Глава седьмая

**ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ  
К ГЕОМЕТРИИ**

<b>§ 1. Аналитическое представление кривых и поверхностей</b>	
223. Кривые на плоскости (в прямоугольных координатах) . . . . .	563
224. Примеры . . . . .	566
225. Кривые механического происхождения . . . . .	569
226. Кривые на плоскости (в полярных координатах). Примеры . . . . .	572
227. Поверхности и кривые в пространстве . . . . .	578
228. Параметрическое представление . . . . .	580
229. Примеры . . . . .	582
<b>§ 2. Касательная и касательная плоскость</b>	
230. Касательная к плоской кривой в прямоугольных координатах . . . . .	586
231. Примеры . . . . .	588

232.	Касательная в полярных координатах . . . . .	590
233.	Примеры . . . . .	591
234.	Касательная к пространственной кривой. Касательная плоскость к поверхности . . . . .	593
235.	Примеры . . . . .	598
236.	Особые точки плоских кривых . . . . .	599
237.	Случай параметрического задания кривой . . . . .	605
<b>§ 3.</b>	<b>Касание кривых между собой</b>	
238.	Огибающая семейства кривых . . . . .	607
239.	Примеры . . . . .	611
240.	Характеристические точки . . . . .	614
241.	Порядок касания двух кривых . . . . .	616
242.	Случай неявного задания одной из кривых . . . . .	619
243.	Соприкасающаяся кривая . . . . .	620
244.	Другой подход к соприкасающимся кривым . . . . .	623
<b>§ 4.</b>	<b>Длина плоской кривой</b>	
245.	Леммы . . . . .	624
246.	Направление на кривой . . . . .	625
247.	Длина кривой. Аддитивность длины дуги . . . . .	627
248.	Достаточные условия спрямляемости. Дифференциал дуги . . . . .	629
249.	Дуга в роли параметра. Положительное направление касательной . . . . .	633
<b>§ 5.</b>	<b>Кривизна плоской кривой</b>	
250.	Понятие кривизны . . . . .	637
251.	Круг кривизны и радиус кривизны . . . . .	640
252.	Примеры . . . . .	642
253.	Координаты центра кривизны . . . . .	646
254.	Определение эволюты и эвольвенты; разыскание эволюты . . . . .	648
255.	Свойства эволюты и эвольвенты . . . . .	651
256.	Разыскивание эвольвенты . . . . .	654
<b>Дополнение</b>		
<b>ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФУНКЦИЙ</b>		
257.	Случай функции одной переменной . . . . .	657
258.	Постановка задачи для двумерного случая . . . . .	659
259.	Вспомогательные предложения . . . . .	661
260.	Основная теорема о распространении . . . . .	665
261.	Обобщение . . . . .	666
262.	Заключительные замечания . . . . .	668
Алфавитный указатель . . . . .		671