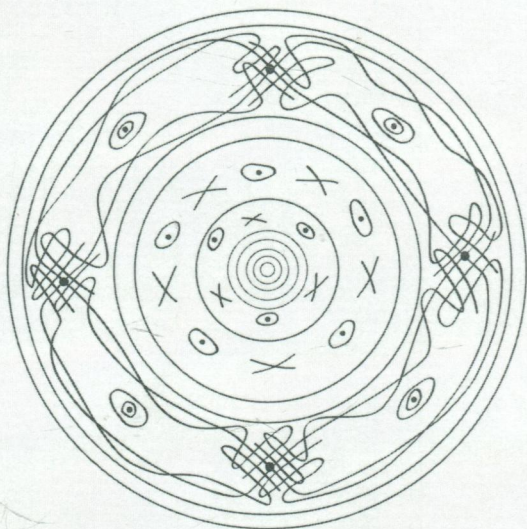


Х. Скотт Думас

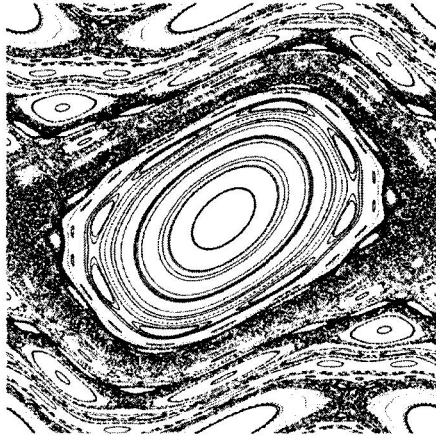
# Теория КАМ: как это было

*Краткое знакомство с содержанием,  
историей и значением классической теории  
Колмогорова–Арнольда–Мозера*



# THE KAM STORY

A Friendly Introduction to the Content, History, and  
Significance of Classical Kolmogorov–Arnold–Moser Theory



**H Scott Dumas**

University of Cincinnati, USA

 **World Scientific**

NEW JERSEY • LONDON • SINGAPORE • BEIJING • SHANGHAI • HONG KONG • TAIPEI • CHENNAI

Х. Скотт Думас

# Теория КАМ: как это было

*Краткое знакомство с содержанием,  
историей и значением классической теории  
Колмогорова–Арнольда–Мозера*

Перевод с английского  
В. В. Шуликовской

Под научной редакцией  
И. В. Бизяева и А. В. Борисова



Москва ♦ Ижевск

2017

УДК 53:51+531/534(091)

ББК 22.2+22.2г

Д 82

**Думас Х. С.**

Д 82 Теория КАМ: как это было. Краткое знакомство с содержанием, историей и значением классической теории Колмогорова – Арнольда – Мозера. — М.–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» ; Институт компьютерных исследований, 2017. — 440 с.

ISBN 978-5-4344-0472-3

Книга охватывает широкий круг вопросов: автор не только описывает в ней теорию КАМ, подробно останавливаясь на некоторых ее деталях, но и представляет эту теорию в историческом контексте (объясняя тем самым, почему она стала своего рода «прорывом»). Кроме того, обсуждаются и приложения теории КАМ, особенно к небесной механике и статистической физике, а также те разделы физики и математики, на которые опирается теория КАМ: динамические системы, классическая механика и теория возмущений гамильтоновых систем.

Несмотря на то, что сегодня доступно множество источников по теории КАМ, данная книга является уникальной, поскольку автору удалось их все систематизировать и дать полное представление об этой теории на доступном уровне, тем самым восполнив давно существовавший пробел в современной научной литературе.

Издание предназначено для широкого круга математиков и физиков (от студентов до преподавателей и специалистов), также оно будет интересно всем, кто интересуется историей и философией науки.

*В оформлении обложки использован рисунок из статьи В. И. Арнольда «Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике», УМН, 18:6, 91–192, 1963.*

**ISBN 978-5-4344-0472-3**

© Ижевский институт компьютерных исследований, перевод на рус. яз., 2017

© World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2014.

All rights reserved. This book, or parts thereof, may not be reproduced in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or any information storage and retrieval system now known or to be invented, without written permission from the Publisher.

Russian translation arranged with World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

# Оглавление

<b>Предисловие к русскому изданию</b> . . . . .	10
<b>Предисловие</b> . . . . .	18
<b>Благодарности</b> . . . . .	21
<b>ГЛАВА 1. Введение</b> . . . . .	23
1.1. О чем эта книга и как она появилась на свет . . . . .	24
1.2. Характерные цитаты и комментарии . . . . .	27
1.3. Замечания о стиле и об организации этой книги . . . . .	29
<b>ГЛАВА 2. Математические предпосылки: интегрируемые гамильтоновы системы</b> . . . . .	32
2.1. Динамические системы . . . . .	32
2.2. Гамильтоновы системы . . . . .	37
2.2.1. Гамильтоновы системы: две картины (и два языка) . . . . .	39
2.2.2. Что означает «решить» гамильтонову систему? . . . . .	44
2.2.3. Полностью интегрируемые гамильтоновы системы и теорема LMAJ . . . . .	45
2.2.4. Резонансные и нерезонансные торы . . . . .	50
2.2.5. Первое введение в понятие невырожденности . . . . .	52
<b>ГЛАВА 3. На пути к КАМ: экскурс в историю</b> . . . . .	55
3.1. Сначала были планеты . . . . .	55
3.2. Ньютон, Пуанкаре и сверхромантический взгляд на теорию . . . . .	56
3.3. Более трезвый взгляд . . . . .	58
3.4. Задача $n$ тел . . . . .	59
3.5. Проблема устойчивости . . . . .	60
3.6. На пути к новой эре: интегрируемость и ее уязвимые места . . . . .	62
3.7. Вейерштрасс, Пуанкаре и премия короля Оскара . . . . .	65
3.8. Последствия премии: посеяны семена перемен . . . . .	67
3.9. Коротко о Пуанкаре и о его работе . . . . .	68

3.10.	Теория возмущений гамильтоновых систем: «фундаментальная задача динамики» . . . . .	74
3.11.	От малых знаменателей к неинтегрируемости и хаосу — что сделал Пуанкаре . . . . .	75
3.12.	Эпоха после Пуанкаре . . . . .	82
3.12.1.	Наследие Пуанкаре в динамике . . . . .	83
3.12.2.	Споры о хаосе . . . . .	87
3.12.3.	Эргодическая теория . . . . .	89
3.12.4.	Снисходительность к хаосу . . . . .	90
3.12.5.	Парадокс и длительный кризис в механике . . . . .	92
<b>ГЛАВА 4.</b>	<b>Теория КАМ</b> . . . . .	<b>95</b>
4.1.	К. Л. Зигель и А. Н. Колмогоров: победа над малыми знаменателями . . . . .	95
4.2.	Колмогоров открывает устойчивые инвариантные торы . . . . .	100
4.3.	Более внимательный взгляд на схему сходимости . . . . .	103
4.3.1.	Общий обзор схемы . . . . .	104
4.3.2.	Технические вопросы . . . . .	106
4.4.	Хронология работ Арнольда и Мозера . . . . .	112
4.4.1.	Хронология работ Арнольда . . . . .	112
4.4.2.	Хронология работ Мозера . . . . .	114
4.5.	Прототип теоремы КАМ . . . . .	115
4.6.	Ранние версии теоремы КАМ . . . . .	116
4.7.	Более поздние результаты, оптимальные или почти оптимальные . . . . .	121
4.8.	Другие подходы и дальнейшие результаты . . . . .	125
<b>ГЛАВА 5.</b>	<b>Теория КАМ в контексте: вопросы, выводы, значение</b>	<b>131</b>
5.1.	Беглый обзор теории КАМ на словах и в картинках . . . . .	131
5.1.1.	Теория КАМ в картинках . . . . .	131
5.1.2.	Последняя усмешка Гегеля . . . . .	132
5.1.3.	Большая историческая панорама . . . . .	134
5.2.	За и против, мифы недоброжелателей и энтузиастов . . . . .	138
5.2.1.	Список доводов за и против . . . . .	138
5.2.2.	Обсуждение . . . . .	139
5.3.	«Социологические» вопросы . . . . .	144
5.3.1.	Почему потребовалось так много времени? . . . . .	145
5.3.2.	Почему так мало американцев? . . . . .	146

5.3.3.	Доказал ли Колмогоров теорему КАМ? . . . . .	147
5.3.4.	Насколько трудным было доказательство? . . . . .	149
5.4.	Насколько оправдана репутация «знаменитой теории»? . . . .	151
5.4.1.	Краткое перечисление общепринятых аргументов . . . .	151
5.4.2.	Апология теории КАМ как базовой части классической механики . . . . .	152
<b>ГЛАВА 6. Другие результаты в теории возмущений гамильтоновых систем . . . . .</b>		<b>156</b>
6.1.	Геометрическая теория возмущений гамильтоновых систем: теория КАМ, канторы и теория Обри–Мезера . . . . .	157
6.2.	Классическая теория возмущений гамильтоновых систем: теория Нехорошева . . . . .	161
6.2.1.	Теорема Нехорошева . . . . .	161
6.2.2.	Краткая история теории Нехорошева и ее приложений . . . .	163
6.2.3.	Немного о доказательствах в теории Нехорошева . . . .	168
6.3.	Неустойчивость в теории возмущений гамильтоновых систем: диффузия Чирикова, диффузия Арнольда и другие механизмы . . . . .	170
6.3.1.	Режим Чирикова и стандартное отображение Чирикова . . . .	171
6.3.2.	Режим Нехорошева и диффузия Арнольда . . . . .	176
<b>ГЛАВА 7. Приложения в физике . . . . .</b>		<b>194</b>
7.1.	Устойчивость Солнечной системы (или ее отсутствие?) . . . .	194
7.1.1.	Приложение теории КАМ к задаче $n$ тел . . . . .	195
7.1.2.	Специальные результаты для подсистем . . . . .	203
7.1.3.	Физическая Солнечная система . . . . .	204
7.2.	Приложения в статистической механике . . . . .	208
7.2.1.	О Больцмане . . . . .	209
7.2.2.	Эргодическая гипотеза . . . . .	212
7.2.3.	Еще раз о равном распределении энергии, парадоксе FPU и ультрафиолетовой катастрофе . . . . .	224
7.3.	Другие приложения теории КАМ в физике . . . . .	230
7.3.1.	Типичное приложение: эллиптические положения равновесия в гамильтоновых системах . . . . .	231
7.3.2.	Устойчивость движения заряженной частицы в электрическом или магнитном полях . . . . .	231
7.3.3.	Более экзотические приложения . . . . .	233

<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А. Статья Колмогорова 1954 года. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона</b> . . . . .	235
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ В. Обзор проблемы малых знаменателей в случае низкой размерности</b> . . . . .	241
В.1. Проблема линеаризации . . . . .	241
В.1.1. От функционального уравнения Шрёдера к центральной задаче Зигеля . . . . .	242
В.1.2. Уточнения и оптимальные условия в задаче Зигеля . . . . .	244
В.2. Отображения окружности . . . . .	245
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ С. Встреча Востока и Запада: русские, европейцы, американцы</b> . . . . .	249
С.1. Культурные стереотипы в математике . . . . .	250
С.2. Культурные и стилистические напряжения . . . . .	251
С.3. Пересечение культур в теории КАМ . . . . .	252
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ D. Указания к дальнейшему чтению</b> . . . . .	255
D.1. Общие сведения по теории КАМ . . . . .	255
D.1.1. Оригинальные статьи по теории КАМ и вопросы приоритета . . . . .	255
D.1.2. Доступные доказательства теорем КАМ . . . . .	257
D.1.3. Книги по теории КАМ (Что еще за книги?) . . . . .	258
D.1.4. Обзор статей, монографий и отдельных глав в книгах, посвященных теории КАМ . . . . .	258
D.1.5. Толкования, исторические справки и другие источники по теории КАМ . . . . .	261
D.2. Математические предпосылки . . . . .	262
D.2.1. Динамические системы и ОДУ . . . . .	262
D.2.2. Классическая механика и гамильтонова динамика . . . . .	263
D.2.3. Эргодическая теория . . . . .	266
D.3. Теория хаоса . . . . .	266
D.3.1. Популярная сторона хаоса . . . . .	266
D.3.2. Дебаты о хаосе . . . . .	267
D.3.3. Наследие популярной теории хаоса . . . . .	270
D.4. История . . . . .	271
D.4.1. Специфическая природа истории математики и физики . . . . .	271



D.4.2.	Ранняя история математики и астрономии . . . . .	272
D.4.3.	Между Ньютоном и Пуанкаре . . . . .	273
D.4.4.	Эпоха Вейерштрасса и Пуанкаре . . . . .	273
D.4.5.	Гипотеза Пенлеве и задача $n$ тел . . . . .	274
D.4.6.	Советская и русская школы динамических систем . . . . .	275
D.4.7.	История динамических систем в целом . . . . .	275
D.5.	Биографии . . . . .	276
D.5.1.	Общие биографические источники . . . . .	276
D.5.2.	Основоположники . . . . .	276
D.6.	Приложения теории КАМ (и Нехорошева) . . . . .	278
D.6.1.	Приложения к небесной механике; устойчивость . . . . .	278
D.6.2.	Приложения к статистической механике, эргодической теории . . . . .	279
D.6.3.	Другие приложения . . . . .	281
D.7.	Разделы математики, связанные с классической теорией КАМ . . . . .	282
D.7.1.	Проблема малых знаменателей в случаях небольшой размерности . . . . .	282
D.7.2.	Теория Обри–Мезера и слабая теория КАМ; теория КАМ для уравнений в частных производных . . . . .	283
D.7.3.	Теория Нехорошева . . . . .	284
D.7.4.	Диффузия Арнольда . . . . .	285
D.8.	Культура, философия, Бурбаки и т. д. . . . .	286
<b>Приложение Е. Избранные цитаты . . . . .</b>		<b>288</b>
<b>Приложение F. Словарь . . . . .</b>		<b>293</b>
<b>Литература . . . . .</b>		<b>390</b>
<b>Предметно-именной указатель . . . . .</b>		<b>425</b>