

Ю. Р. Мусин, И. В. Александров

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

## ГРАВИТАЦИИ, КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ, СУПЕРСИММЕТРИИ

### АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ЯЗЫК ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ для ФИЗИКОВ



URSS

- Алгебро-геометрический дуализм
- Алгебраические методы в теории калибровочных полей
- Расслоенные пространства
- Элементы алгебраической топологии
- Суперпространство
- Элементы алгебраической геометрии
- Категорный язык геометрии

Ю. Р. Мусин, И. В. Александров

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
АППАРАТ  
ГРАВИТАЦИИ,  
КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ,  
СУПЕРСИММЕТРИИ**

**Алгебраический язык  
геометрии и топологии  
для физиков**



**URSS**  
МОСКВА

**Мусин Юрат Рашитович, Александров Игорь Витальевич**  
**Математический аппарат гравитации, калибровочных теорий,**  
**суперсимметрии: Алгебраический язык геометрии и топологии**  
**для физиков. — М.: ЛЕНАНД, 2021. — 512 с.**

Широкое внедрение алгебраических методов в теоретическую физику не является новостью. Калибровочные поля и их интерпретация на языке расслоенных пространств, суперсимметричные расширения полевых теорий, возникновение теорий Великого объединения, струнных моделей, квантовой петлевой гравитации — все это ввело в арсенал используемых физиками методов экзотические ранее разделы алгебраической топологии, алгебраической геометрии и даже теории категорий. Большие проблемы возникают перед начинающими физиками, получившими стандартную университетскую подготовку, в которой абстрактная алгебра представлена весьма скромно. Ощущается потребность в компактном путеводителе по современной алгебре для указанной категории читателей. Такая задача не может быть решена в одной книге разумного размера. В силу научных интересов авторов, лежащих в изучении геометрической структуры суперрасширений пространства-времени, было выбрано только одно направление — алгебраические методы изучения геометрических конструкций. При этом мы старались избегать строгого формального подхода, принятого в математических учебниках, то есть цепочек: «определение — теорема — доказательство», а сосредотачивались на смысле вводимых определений, простых примерах, а также сути базовых теорем. Для удобства работы с книгой она снабжена подробным указателем определений и обширным указателем используемых обозначений. Для ориентирования в множестве алгебраических учебников прилагается путеводитель по литературе, рассчитанный на начинающих.

Для чтения книги достаточно базовой подготовки в объеме стандартного курса математики для студентов второго курса университета. Предполагается, что при усвоении содержания книги читатель получает возможность чтения статей, посвященных современным моделям пространства и времени.

Формат 60×90/16. Печ. л. 32. Зак. № АР-8631.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 11А, стр. 11.

**ISBN 978-5-9710-8859-2**

(мягкая обложка)

**ISBN 978-5-9710-8860-8**

(твердый переплет)

© ЛЕНАНД, 2021



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |            |
|---|------------|
| Предисловие .....   | 4          |
| <b>Глава 1 Алгебро-геометрический дуализм .....</b>                     | <b>10</b>  |
| 1.1 Алгебраические структуры .....                                      | 11         |
| 1.2 Топологические структуры .....                                      | 18         |
| 1.3 Первый синтез: многообразия и тензоры.....                          | 27         |
| 1.3.1 Гладкие многообразия.....   | 27         |
| 1.3.2 Тензоры.....  | 30         |
| 1.3.3 Римановы пространства и тензорные поля.....                       | 35         |
| 1.3.4 Тензорные алгебры.....  | 39         |
| 1.4 Физические плоды.....   | 44         |
| 1.4.1 Пространство-время.....   | 44         |
| 1.4.2 Электромагнитное поле на языке форм.....                          | 52         |
| <b>Глава 2 Алгебраические методы в теории калибровочных полей</b> ..... | <b>56</b>  |
| 2.1 Первоначальные сведения по теории групп и алгебр Ли .....           | 56         |
| 2.1.1 Алгебры Ли.....   | 56         |
| 2.1.1.1 Базовые определения.....  | 56         |
| 2.1.1.2 Классификация алгебр Ли.....                                    | 60         |
| 2.1.1.3 Форма Киллинга .....  | 64         |
| 2.1.1.4 Структура алгебр Ли.....  | 66         |
| 2.1.2 Группы Ли.....  | 69         |
| 2.1.2.1 Производная Ли.....   | 70         |
| 2.1.2.2 Теория Ли.....  | 74         |
| 2.1.2.3 Классификация групп Ли.....                                     | 82         |
| 2.1.2.4 Локализация и накрытие групп преобразований ...                 | 85         |
| 2.1.2.5 Линейные представления групп Ли.....                            | 90         |
| 2.2 Физика калибровочных полей.....                                     | 93         |
| 2.2.1 Калибровочные преобразования.....                                 | 93         |
| 2.2.2 Поля Янга-Миллса на языке теории Ли.....                          | 100        |
| 2.2.3 Модельные примеры.....  | 106        |
| 2.2.4 Калибровочный подход в гравитации.....                            | 112        |
| <b>Глава 3 Расслоенные пространства .....</b>                           | <b>118</b> |
| 3.1 Первоначальные сведения.....  | 118        |
| 3.1.1 Расслоения и накрытия.....  | 118        |
| 3.1.2 Главные расслоения.....   | 121        |
| 3.1.3 Расслоения Стиррода.....  | 126        |
| 3.1.4 Ассоциированные расслоения.....                                   | 130        |

|                |   |            |
|----------------|---|------------|
| 3.2            | Связности в расслоенных пространствах .....           | 134        |
| 3.2.1          | Формы связности в главном расслоении.....             | 134        |
| 3.2.2          | Лифты и ковариантные производные.....                 | 137        |
| 3.2.3          | Форма кривизны и уравнение Картана.....               | 141        |
| <b>Глава 4</b> | <b>Элементы алгебраической топологии.....</b>         | <b>149</b> |
| 4.1.           | Гомологии и комплексы.....                            | 149        |
| 4.1.1          | Алгебраическое построение комплекса.....              | 149        |
| 4.1.2          | Симплициальные гомологии.....                         | 153        |
| 4.2.           | Гомологические свойства многообразий.....             | 161        |
| 4.2.1          | Когомологии и комплекс де Рама .....                  | 161        |
| 4.2.2          | Гомотопическая эквивалентность когомологий .....      | 170        |
| 4.2.3          | Последовательность и принцип Майера–Вьеториса.....    | 174        |
| 4.2.4          | Когомологии Чеха, комплекс Чеха–де Рама.....          | 178        |
| 4.2.5          | Сингулярные и клеточные гомологии.....                | 184        |
| 4.3.           | Методы и приложения.....                              | 195        |
| 4.3.1          | Методы: от гомологий пары к изоморфизму Пуанкаре..... | 195        |
| 4.3.2          | Гомотопии и гомологии – основные связи.....           | 203        |
| 4.3.3          | Характеристические классы.....                        | 212        |
| 4.3.4.         | Монополь Дирака.....                                  | 217        |
| 4.3.4.1        | Физическая модель.....                                | 217        |
| 4.3.4.2        | Математические конструкции.....                       | 220        |
| <b>Глава 5</b> | <b>Суперпространство.....</b>                         | <b>225</b> |
| 5.1            | Алгебра Клиффорда.....                                | 226        |
| 5.2            | Алгебра Грассмана .....                               | 230        |
| 5.3            | Элементы псевдоклассической механики.....             | 236        |
| 5.4            | Супервремя.....                                       | 244        |
| <b>Глава 6</b> | <b>Элементы алгебраической геометрии.....</b>         | <b>252</b> |
| 6.1            | Вводный очерк.....                                    | 252        |
| 6.2            | Коммутативная алгебра.....                            | 261        |
| 6.2.1          | Коммутативные кольца и условие нётеровости.....       | 262        |
| 6.2.2          | Модули над коммутативными кольцами.....               | 273        |
| 6.2.3          | Алгебры над коммутативными кольцами и полями.....     | 283        |
| 6.3            | На пути к схемам.....                                 | 291        |
| 6.3.1          | Спектр кольца.....                                    | 292        |
| 6.3.2          | Топология Зарисского.....                             | 299        |
| 6.3.3          | Пучки и окольцованные пространства.....               | 315        |
| 6.3.4          | Схемы и роль нильпотентов.....                        | 329        |
| 6.4            | Квантовые группы и некоммутативная геометрия .....    | 341        |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Глава 7 Категорный язык геометрии</b> .....  | 349 |
| 7.1 Категории и функторы .....  | 349 |
| 7.2 Свойство универсальности и основные понятия .....                                     | 361 |
| 7.3 Абелевы категории .....   | 387 |
| 7.4 Категория супермногообразий .....   | 398 |
| 7.5 Топосы и геометрия пространства и времени.....  | 409 |
| <b>Дополнительные главы «Гам, за облаками...»</b> .....                                   | 414 |
| Д.1 Алгебраическая топология.....   | 414 |
| Д.1.1 Формулы универсальных коэффициентов и<br>когомологии с коэффициентами в пучке ..... | 414 |
| Д.1.2 Пространства Эйленберга–Маклейна и теории<br>препятствий.....                       | 423 |
| Д.2 Спектральные последовательности.....  | 436 |
| Д.2.1 Гомологическая спектральная последовательность.....                                 | 436 |
| Д.2.2 Когомологический вариант, применения к<br>расслоениям и функториальность .....      | 447 |
| Д.2.3 Практические примеры и метод Серра.....   | 457 |
| Библиографический список .....  | 466 |
| Путеводитель по литературе.....   | 476 |
| Указатель определений.....  | 483 |
| Указатель обозначений .....   | 498 |
| Именной указатель.....  | 507 |

#### Рекомендуемые маршруты чтения:

- *Первое чтение:*  
Глава 1, Глава 2 (2.1.1.1, 2.1.2.1, 2.2.1), Глава 3 (3.1.1, 3.1.2, 3.2.1).  
Глава 4 (4.1, 4.2.1), Глава 5 (5.1, 5.2), Глава 6 (6.1, 6.4), Глава 7 (7.1).
- *Рабочий уровень практикующего физика:*  
Глава 1, Глава 2, Глава 3, Глава 4 (4.1, 4.2, 4.3.3, 4.3.4), Глава 5,  
Глава 6 (6.1, 6.2, 6.4).
- *За пределами стандартного университетского курса для физиков:*  
Глава 3, Глава 4, Глава 6, Глава 7, Дополнительные главы Д.1 и Д.2.
- *Физические приложения:*  
1.4; 2.2; 4.3.4; 5.3; 5.4; 6.4; 7.5.