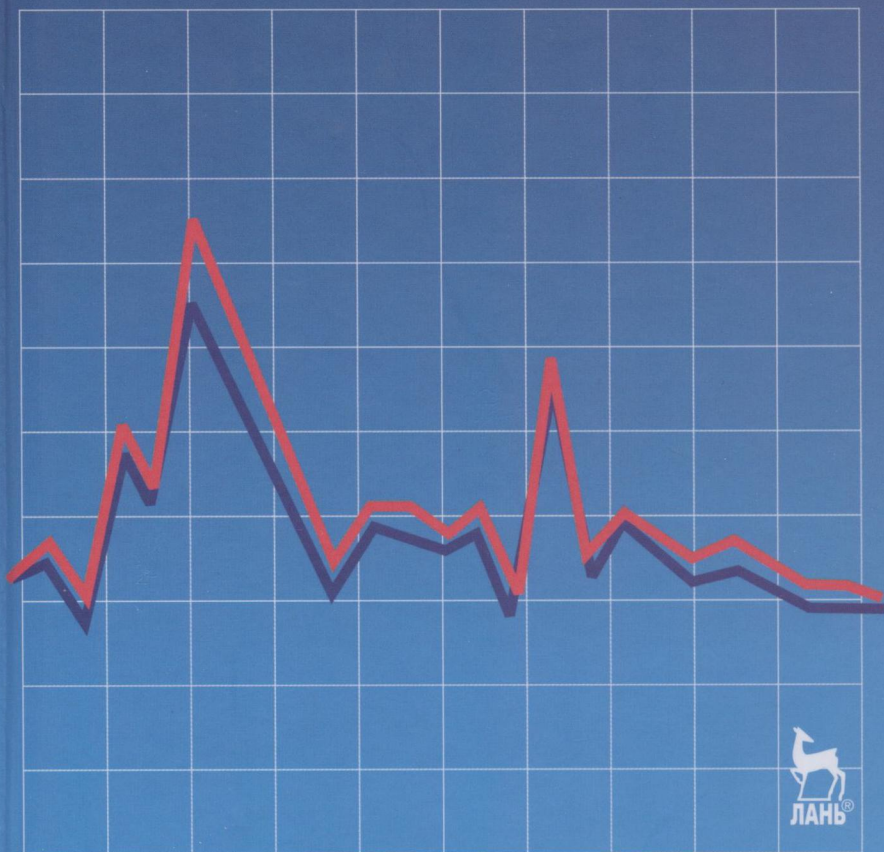


А. В. Прасолов

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ



А. В. ПРАСОЛОВ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

*Издание второе, исправленное*

**РЕКОМЕНДОВАНО**  
*УМО вузов РФ по образованию  
в области прикладных математики и физики  
в качестве учебного пособия для студентов,  
обучающихся по направлению подготовки  
«Прикладные математика и физика»,  
а также для студентов,  
обучающихся по другим направлениям и специальностям  
в области естественных и математических наук,  
техники и технологии*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР  
2023

ББК 65.050

П 70

**Прасолов А. В.**

**П 70** Математические методы экономической динамики: Учебное пособие. — 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2023. — 352 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-0797-2**

Учебное пособие содержит методы и модели экономической динамики, т. е. той части экономической теории, которая устанавливает причины изменений в экономике, основываясь на количественных оценках. Изложенный в книге материал описывает математические методы исследования линейных и нелинейных уравнений, анализ влияния временных лагов, задачи идентификации и прогнозирования. Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика», а также для экономистов, биологов и социологов.

**ББК 65.050**

**Обложка**  
**А. Ю. ЛАПШИН**

© Издательство «Лань», 2023

© А. В. Прасолов, 2023

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2023

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
<i>Глава первая</i>	
Вводная .....	8
1.1. О применении математических инструментов в задачах экономической динамики .....	8
1.1.1. Определение неустойчивости в математике и её трансформация на экономическую динамику ...	10
1.1.2. Диссипация .....	13
1.1.3. Положения равновесия .....	15
1.1.4. Аттракторы .....	21
1.2. О математическом моделировании в экономической динамике .....	23
1.2.1. Некоторые понятия теории математического моделирования .....	23
1.2.2. Понятие адекватности математической модели ...	29
1.2.3. Способы составления математических моделей ...	30
1.2.4. Экстраполяция .....	34
1.3. Модели экономического роста .....	38
1.3.1. Историческая справка .....	38
1.3.2. Односекторные модели роста .....	41
1.3.2.1. Модель мультипликатора Кейнса .....	41
1.3.2.2. Модели Харрода-Домара .....	43
1.3.2.3. Модели циклического роста .....	49
1.3.2.4. Небклассические модели роста ...	50
1.3.3. Модели неймановского типа .....	54
1.3.3.1. Стационарные траектории в модели Неймана .....	55
1.3.3.2. Магистральная теория .....	57
1.3.3.3. Модификации неймановской модели .....	58
1.3.4. Модели леонтьевского типа .....	60
1.3.4.1. Метод «затраты-выпуск» .....	60
1.3.4.2. Магистральный рост в леонтьевских моделях .....	62
1.3.4.3. Динамические леонтьевские модели .....	64

*Глава вторая*

<b>Линейные динамические модели</b> .....	66
2.1. Введение .....	66
2.2. Анализ временных рядов .....	66
2.2.1. Набор скалярных данных .....	67
2.2.2. Характеристики модели временного ряда .....	68
2.2.3. Сглаживание временных рядов .....	75
2.2.4. Об интервале идентификации .....	77
2.3. Многомерные временные ряды .....	81
2.3.1. Задача о форвардных операциях .....	81
2.3.2. Авторегрессии при малых объемах информации .....	85
2.3.3. Авторегрессии при больших объемах данных .....	92
2.3.4. Идентификация авторегрессионной модели с запаздыванием .....	99
2.3.5. Обсуждение критерия оптимальности .....	104
2.3.6. Модель равновесной цены по Менделееву .....	107
2.4. Модели управляемых процессов .....	114
2.4.1. Задача распределения инвестиций .....	115
2.4.2. Восстановление разностных линейных систем. Специальный вход .....	121
2.4.3. Восстановление разностных линейных систем. Произвольный вход .....	129
2.5. Заключение .....	131

*Глава третья*

<b>Модели Лотки–Вольтерры в экономике</b> .....	133
3.1. Основные идеи, методы и результаты .....	134
3.1.1. Описание модели .....	134
3.1.2. Цели исследования и техника анализа .....	136
3.2. Экономические интерпретации .....	138
3.2.1. Общие рассуждения .....	138
3.2.2. Конкуренция предприятий на общем рынке .....	141
3.2.3. Динамика иерархически связанных отраслей .....	144
3.2.4. Международная конкуренция .....	146
3.2.5. Кондратьевские волны .....	149
3.3. Последствие в экономических моделях .....	151
3.3.1. Модель динамики цены в окрестности равновесной точки .....	152
3.3.2. Макроэкономические модели с запаздыванием .....	154
3.3.3. Изменение качественного поведения модели при увеличении запаздывания .....	157
3.4. Полный анализ взаимодействия экономических агентов .....	160
3.4.1. Стационарные точки модели .....	161
3.4.2. Конкурентная деятельность без запаздывания .....	164
3.4.3. Конкурентная деятельность с временным лагом .....	171
3.4.4. Взаимозависимая деятельность с последствием .....	182
3.4.5. Произвольное число участников рынка .....	188

3.5. Проблема идентификации системы . . . . .	190
3.5.1. Идентификация модели без временного лага . . . и без искажения информации . . . . .	190
3.5.2. Идентификация модели без запаздывания . . . и с ошибками в информации . . . . .	193
3.5.3. Идентификация модели с запаздыванием . . . . .	195
3.6. Заключение . . . . .	196

#### *Глава четвертая*

Различные динамические модели . . . . .	198
4.1. Прогнозирование курсов валют . . . . .	198
4.1.1. Формулировка проблемы . . . . .	199
4.1.2. Критерии качества методов прогноза . . . . .	202
4.1.3. Обсуждение методов прогнозирования . . . . .	204
4.1.3.1. Непосредственная аппроксимация временных рядов <sup>а</sup> : . . . . .	204
4.1.3.2. Метод общей корреляции . . . . .	208
4.1.4. Оптимизация длины интервала . . . . .	215
4.1.5. Основные выводы из решения задачи . . . . .	219
4.2. Задачи международной торговли . . . . .	220
4.2.1. Некоторые формализации международной торговли . . . . .	220
4.2.2. Об одном из возможных подходов к анализу протекционизма . . . . .	221
4.3. Модель влияния рекламы на продажу нового товара . . . . .	230
4.4. Задача конкуренции на автомобильном рынке США . . . . .	235
4.4.1. Формулировка задачи . . . . .	235
4.4.2. Вывод уравнений . . . . .	238
4.4.3. Идентификация и числительное приложение . . . . .	241

#### *Приложение 1*

Теория дифференциальных систем с последствием . . . . .	250
Классификация, основные определения, теоремы существования и единственности для уравнений с последствием . . . . .	250
Линейная стационарная система с последствием . . . . .	256
Свойства корней характеристического уравнения . . . . .	260
Прямой метод Ляпунова для систем с последствием . . . . .	265
Исследование устойчивости в случае динамического процесса с дискретным временем . . . . .	287
Задача стабилизации линейных систем с последствием . . . . .	293

#### *Приложение 2*

Об оптимальном размере производства . . . . .	300
---	-----

#### *Приложение 3*

Производственная функция . . . . .	308
Введение . . . . .	308
Понятие производственной функции . . . . .	309

Определения производственной функции . . . . .	309
Об ограничениях производственных функций . . . . .	310
Математические характеристики производственной функции и их экономическая интерпретация . . . . .	311
Подходы к построению производственных функций . . . . .	315
Метод множеств достижимости . . . . .	315
Построение теоретических производственных функций на основе ММД . . . . .	316
Построение производственных функций с постоянной эластичностью замещения факторов . . . . .	318
Конкретные виды производственных функций, их особенности . . . . .	322
НТП в производственных функциях . . . . .	328
Отражение технического прогресса в ПФ . . . . .	328
Экзогенный научно-технический прогресс . . . . .	329
Экзогенный и эндогенный НТП . . . . .	332
Примеры макроэкономических и микроэкономических моделей . . . . .	332
Экзогенный ТП в производственной функции . . . . .	332
Уравнение капиталовложений в основные фонды . . . . .	333
Макроэкономическая модель с экзогенным ТП . . . . .	333
Уравнение экономического роста . . . . .	334
Построение производственных функций в условиях конкретной действительности . . . . .	335
<b>Библиографический список . . . . .</b>	<b>338</b>
<b>Указатель имен . . . . .</b>	<b>344</b>