

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК



Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

---

Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

7-е издание

---

*Рекомендовано  
Министерством образования Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для студентов  
физико-математических специальностей  
высших учебных заведений*

---



---

Москва  
БИНОМ. Лаборатория знаний

УДК 519.6 (075)  
ББК 22.193  
Б30

*Печатается  
по решению Ученого совета  
Московского университета*

**Бахвалов Н. С.**

Б30 Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков,  
Г. М. Кобельков. — 7-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория  
знаний, 2019. — 636 с. : ил. — (Классический университетский  
учебник).

ISBN 978-5-9963-0449-3

Классический учебник по численным методам, переработанный с учетом современных тенденций в вычислительных методах. В данном издании устранены неточности и опечатки, имевшиеся в предыдущих изданиях, упрощены некоторые доказательства.

Для студентов и преподавателей вузов, а также для специалистов, использующих численные методы в своей работе.

**УДК 519.6 (075)  
ББК 22.193**

**По вопросам приобретения обращаться:  
«БИНОМ. Лаборатория знаний»  
Телефон: (499) 157-5272  
e-mail: binom@Lbz.ru, <http://www.Lbz.ru>**

ISBN 978-5-9963-0449-3

© БИНОМ. Лаборатория знаний,  
2011  
© МГУ им. М. В. Ломоносова,  
художественное оформление,  
2003

---

---

# Оглавление



Предисловие	5
Предисловие к третьему изданию	7
Введение	9
<b>1 Погрешность результата численного решения задачи</b>	<b>17</b>
§ 1. Источники и классификация погрешности	17
§ 2. Запись чисел в ЭВМ	21
§ 3. Абсолютная и относительная погрешности. Формы записи данных	22
§ 4. О вычислительной погрешности	25
§ 5. Погрешность функции	27
§ 6. Обратная задача	32
<b>2 Интерполяция и численное дифференцирование</b>	<b>35</b>
§ 1. Постановка задачи приближения функций	36
§ 2. Интерполяционный многочлен Лагранжа	39
§ 3. Оценка остаточного члена интерполяционного многочлена Лагранжа	43
§ 4. Разделенные разности и их свойства	43
§ 5. Интерполяционная формула Ньютона с разделенными разностями	45
§ 6. Разделенные разности и интерполирование с кратными узлами	48
§ 7. Уравнения в конечных разностях	51
§ 8. Многочлены Чебышева	58
§ 9. Минимизация оценки остаточного члена интерполяционной формулы	62
§ 10. Конечные разности	65
§ 11. Интерполяционные формулы для таблиц с постоянным шагом	68
§ 12. Составление таблиц	71
§ 13. О погрешности округления при интерполяции	74
§ 14. Применения аппарата интерполирования. Обратная интерполяция	75
§ 15. Численное дифференцирование	76
§ 16. О вычислительной погрешности формул численного дифференцирования	83
§ 17. Рациональная интерполяция	85

<b>3</b>	<b>Численное интегрирование</b>	86
§ 1.	Простейшие квадратурные формулы. Метод неопределенных коэффициентов .....	86
§ 2.	Оценки погрешности квадратуры .....	89
§ 3.	Квадратурные формулы Ньютона—Котеса .....	94
§ 4.	Ортогональные многочлены .....	99
§ 5.	Квадратурные формулы Гаусса .....	106
§ 6.	Практическая оценка погрешности элементарных квадратурных формул .....	113
§ 7.	Интегрирование быстро осциллирующих функций .....	116
§ 8.	Повышение точности интегрирования за счет разбиения отрезка на равные части .....	119
§ 9.	О постановках задач оптимизации .....	124
§ 10.	Постановка задачи оптимизации квадратур .....	129
§ 11.	Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы .....	131
§ 12.	Примеры оптимизации распределения узлов .....	137
§ 13.	Главный член погрешности .....	140
§ 14.	Правило Рунге практической оценки погрешности .....	144
§ 15.	Уточнение результата интерполяцией более высокого порядка точности .....	148
§ 16.	Вычисление интегралов в нерегулярном случае .....	150
§ 17.	Принципы построения стандартных программ с автоматическим выбором шага .....	157
<b>4</b>	<b>Приближение функций и смежные вопросы</b>	164
§ 1.	Наилучшие приближения в линейном нормированном пространстве .....	164
§ 2.	Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве и вопросы, возникающие при его практическом построении ....	166
§ 3.	Тригонометрическая интерполяция. Дискретное преобразование Фурье .....	171
§ 4.	Быстрое преобразование Фурье .....	175
§ 5.	Наилучшее равномерное приближение .....	178
§ 6.	Примеры наилучшего равномерного приближения .....	181
§ 7.	О форме записи многочлена .....	187
§ 8.	Интерполяция и приближение сплайнами .....	191
<b>5</b>	<b>Многомерные задачи</b>	201
§ 1.	Метод неопределенных коэффициентов .....	202
§ 2.	Метод наименьших квадратов и регуляризация .....	203
§ 3.	Примеры регуляризации .....	206
§ 4.	Сведение многомерных задач к одномерным .....	212
§ 5.	Интерполяция функций в треугольнике .....	220
§ 6.	Оценка погрешности численного интегрирования на равномерной сетке .....	222
§ 7.	Оценка снизу погрешности численного интегрирования .....	225
§ 8.	Метод Монте-Карло .....	232

§ 9. Обсуждение правомерности использования недетерминированных методов решения задач.....	236
§ 10. Ускорение сходимости метода Монте-Карло.....	239
§ 11. О выборе метода решения задачи.....	243
<b>6 Численные методы алгебры</b>	<b>250</b>
§ 1. Методы последовательного исключения неизвестных.....	253
§ 2. Метод отражений.....	262
§ 3. Метод простой итерации.....	265
§ 4. Особенности реализации метода простой итерации на ЭВМ	268
§ 5. $\delta^2$ -процесс практической оценки погрешности и ускорения сходимости.....	271
§ 6. Оптимизация скорости сходимости итерационных процессов	275
§ 7. Метод Зейделя.....	285
§ 8. Метод наискорейшего градиентного спуска.....	290
§ 9. Метод сопряженных градиентов.....	294
§ 10. Итерационные методы с использованием спектрально-эквивалентных операторов.....	301
§ 11. Погрешность приближенного решения системы уравнений и обусловленность матриц. Регуляризация.....	304
§ 12. Проблема собственных значений.....	315
§ 13. Решение полной проблемы собственных значений при помощи QR-алгоритма.....	320
<b>7 Решение систем нелинейных уравнений и задач оптимизации</b>	<b>325</b>
§ 1. Метод простой итерации и смежные вопросы.....	327
§ 2. Метод Ньютона решения нелинейных уравнений.....	331
§ 3. Методы спуска.....	337
§ 4. Другие методы сведения многомерных задач к задачам меньшей размерности.....	342
§ 5. Решение стационарных задач путем установления.....	345
§ 6. Что и как оптимизировать?.....	353
<b>8 Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений</b>	<b>364</b>
§ 1. Решение задачи Коши с помощью формулы Тейлора.....	365
§ 2. Методы Рунге—Кутты.....	367
§ 3. Методы с контролем погрешности на шаге.....	373
§ 4. Оценки погрешности одношаговых методов.....	375
§ 5. Конечно-разностные методы.....	380
§ 6. Метод неопределенных коэффициентов.....	383
§ 7. Исследование свойств конечно-разностных методов на модельных задачах.....	387
§ 8. Оценка погрешности конечно-разностных методов.....	392
§ 9. Особенности интегрирования систем уравнений.....	400
§ 10. Методы численного интегрирования уравнений второго порядка.....	412

§ 11. Оптимизация распределения узлов интегрирования .....	415
<b>9 Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений</b> .....	420
§ 1. Простейшие методы решения краевой задачи для уравнений второго порядка .....	420
§ 2. Функция Грина сеточной краевой задачи .....	426
§ 3. Решение простейшей краевой сеточной задачи .....	431
§ 4. Замыкания вычислительных алгоритмов .....	439
§ 5. Обсуждение постановок краевых задач для линейных систем первого порядка .....	447
§ 6. Алгоритмы решения краевых задач для систем уравнений первого порядка .....	452
§ 7. Нелинейные краевые задачи .....	458
§ 8. Аппроксимации специального типа .....	464
§ 9. Конечно-разностные методы отыскания собственных значений .....	476
§ 10. Построение численных методов с помощью вариационных принципов .....	479
§ 11. Улучшение сходимости вариационных методов в нерегулярном случае .....	489
§ 12. Влияние вычислительной погрешности в зависимости от формы записи конечно-разностного уравнения .....	491
<b>10 Методы решения уравнений в частных производных</b> .....	498
§ 1. Основные понятия теории метода сеток .....	500
§ 2. Аппроксимация простейших гиперболических задач .....	508
§ 3. Принцип замороженных коэффициентов .....	524
§ 4. Численное решение нелинейных задач с разрывными решениями .....	527
§ 5. Разностные схемы для одномерного параболического уравнения .....	531
§ 6. Разностная аппроксимация эллиптических уравнений .....	546
§ 7. Решение параболических уравнений с несколькими пространственными переменными .....	569
§ 8. Методы решения сеточных эллиптических уравнений .....	583
<b>11 Численные методы решения интегральных уравнений</b> .....	602
§ 1. Решение интегральных уравнений методом замены интеграла квадратурной суммой .....	602
§ 2. Решение интегральных уравнений с помощью замены ядра на вырожденное .....	607
§ 3. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода .....	611
<b>Заключение</b> .....	620
<b>Список литературы</b> .....	624
<b>Предметный указатель</b> .....	629