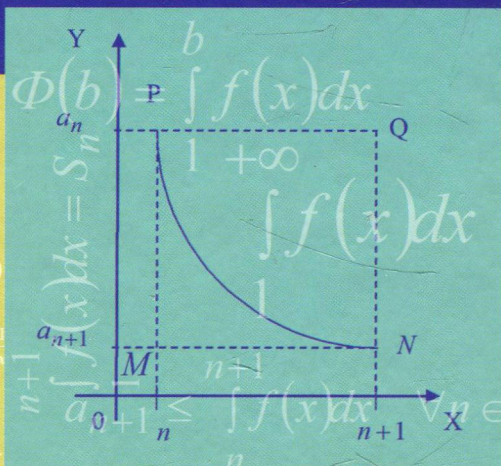


Л. В. Апарина

# ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ



$$- 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$$

$$\sin 1 + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{3^2} + \dots +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{\ln 100}{n}$$



ЛАНЬ®

Л. В. АПАРИНА

# ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

*Издание второе,  
исправленное*

*РЕКОМЕНДОВАНО*

*УМО по специальностям педагогического образования  
в качестве учебного пособия для студентов вузов,  
обучающихся по специальности  
050201.65 — «Математика»*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР  
2023

ББК 22.16я73

А 76

**Апарина Л. В.**

**А 76** Числовые и функциональные ряды: Учебное пособие. 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2023. — 160 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1341-6**

В учебном пособии дан необходимый теоретический материал по числовым и функциональным рядам. Кратко изложены дополнительные внепрограммные вопросы (например, дополнительные признаки сходимости числовых рядов, равномерной сходимости), что позволяет наметить темы курсовых работ. Большое внимание уделяется приемам решения задач. Указанные особенности книги делают ее актуальной и полезной в настоящее время, когда все большее распространение получает дистанционное обучение.

Пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся на факультетах с расширенной программой по математике, а также учителей математики, информатики, физики.

ББК 22.16я73

**Рецензенты:**

*В. В. ПОПОВ* — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики Волгоградского государственного университета;

*Е. Л. МАКАРОВА* — кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой математического анализа Волгоградского государственного педагогического университета.

**Обложка**

*Е. А. ВЛАСОВА*

*Охраняется законом РФ об авторском праве.  
Воспроизведение всей книги или любой ее части  
запрещается без письменного разрешения издателя.*

*Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2023

© Л. В. Апарина, 2023

© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2023

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	3
<i>Часть первая</i>	
<b>Числовые ряды</b> .....	4
Введение .....	4
§ 1. Геометрическая прогрессия .....	5
§ 2. Числовые ряды, понятие сходимости, простейшие свойства сходящихся рядов .....	7
1. Основные понятия .....	7
2. Свойство ассоциативности (сочетательное свойство) .....	10
§ 3. Сходимость ряда и его остатка .....	11
§ 4. Необходимое условие сходимости ряда .....	14
§ 5. Критерий Коши .....	17
1. Критерий Коши для числовой последовательности .	17
2. Критерий Коши сходимости числового ряда .....	20
§ 6. Положительные ряды .....	22
1. Критерий сходимости положительного ряда, признаки сравнения .....	22
2. Радикальный признак Коши .....	28
3. Признак Даламбера .....	31
4. Интегральный признак сходимости .....	35
§ 7. Знакопеременные ряды .....	44
§ 8. Абсолютно и условно сходящиеся ряды .....	49
§ 9. Перестановка членов ряда .....	55
<i>Часть вторая</i>	
<b>Функциональные ряды</b> .....	66
§ 10. Функциональные последовательности .....	66
1. Поточечная сходимость функциональной последовательности .....	66
2. Равномерная сходимость функциональной последовательности .....	67
§ 11. Функциональные ряды .....	79
1. Определение и примеры .....	79
2. Равномерная сходимость функционального ряда ...	81

§ 12. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда . . . . .	84
§ 13. Степенные ряды в действительной области. Теорема Абеля . . . . .	89
1. Вводные понятия . . . . .	89
2. Структура области сходимости степенного ряда . . . . .	91
3. Вычисление радиуса сходимости степенного ряда . . . . .	93
4. Равномерная сходимость степенного ряда . . . . .	97
§ 14. Разложение функции в степенной ряд . . . . .	104
1. Формула Тейлора для многочленов . . . . .	104
2. Разложение функции в ряд Маклорена . . . . .	108
3. Разложение функции в ряд Тейлора . . . . .	113
§ 15. Формула Тейлора. Различные формы остаточного члена . . . . .	116
§ 16. Разложение в ряд основных элементарных функций . . . . .	122
1. Разложение в ряд экспоненты $f(x) = e^x$ . . . . .	122
2. Разложение в ряд функций $y = \sin x$ , $y = \cos x$ . . . . .	125
3. Разложение в ряд функций $y = \ln(1 + x)$ , $y = \ln(1 - x)$ . Вычисление логарифмов . . . . .	128
§ 17. Биномиальный ряд . . . . .	133
1. Постановка задачи. Биномиальный ряд и поведение остаточного члена . . . . .	133
2. Применение биномиального ряда к разложению в ряд дробно-рациональных функций . . . . .	137
3. Вычисление обратных тригонометрических функций . . . . .	141
§ 18. Некоторые методы приближенных вычислений с помощью рядов . . . . .	147
1. О решении дифференциальных уравнений с помощью рядов . . . . .	152
<b>Литература . . . . .</b>	<b>153</b>