

# Синергетика

От прошлого  
к будущему

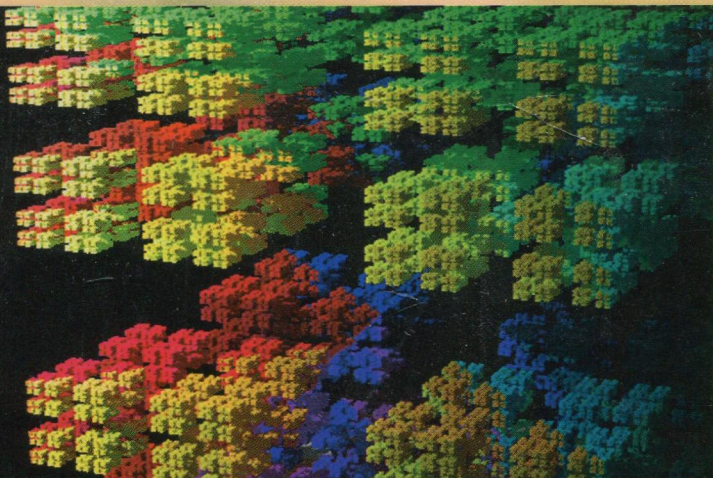


№ 75

Серия основана  
в 2002 г.

Председатель редколлегии  
профессор  
Г. Г. Малинецкий

В. С. Секованов



# Ф ЧТО ТАКОЕ РАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ?



**ШЕДЕВРЫ  
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНОЙ  
ЛИТЕРАТУРЫ**

URSS

Выпуск 114



*Синергетика: от прошлого к будущему • № 75*

*НАУКУ — ВСЕМ!*

*Шедевры научно-популярной литературы (физика) • № 114*

---

**В. С. Секованов**

# **ЧТО ТАКОЕ ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ?**



**URSS**

**МОСКВА**

ББК 22.1п 22.151.4 22.311 22.318 32.81о

**Секованов Валерий Сергеевич**

**Что такое фрактальная геометрия?** — М.: ЛЕНАНД, 2016. — 272 с.

(Синергетика: от прошлого к будущему. № 75; НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы (физика). № 114.)

В настоящем издании рассмотрены вопросы, связанные с пошаговым изучением фрактальной геометрии — от размерности самоподобия до размерности Хаусдорфа—Безиковича и топологической размерности, с помощью которых вводится понятие «фрактал». В книге большое внимание уделено темам из области математики и информатики, на которые опирается изучение фрактальной геометрии. Рассмотрены также вопросы, связанные с становлением фрактальной геометрии как науки, использованием фрактальных множеств в различных сферах человеческой деятельности, решением задач фрактальной геометрии, построением фрактальных множеств с помощью компьютерных программ и математических пакетов, созданием художественных композиций с использованием фракталов.

Адресовано студентам, бакалаврам, магистрам, аспирантам физико-математических специальностей университетов, преподавателям математики и информатики высшей школы, а также учителям математики и информатики, ученикам средних школ с углубленным изучением математики.

ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.  
Формат 60×90/16. Печ. л. 17. Зак. № 1091.

Отпечатано в ООО «Издательство Заураль».  
640022, Курган, ул. К. Маркса, 106.

ISBN 978–5–9710–2445–3

© ЛЕНАНД, 2015

18037 ID 202043



9 785971 024453



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# Оглавление

От редакции .....	6
Предисловие.....	9
Введение .....	15
<i>Глава 1</i>	
<b>Первый шаг на пути к фракталам.....</b>	<b>17</b>
1.1. Что такое фрактальная геометрия?.....	17
1.2. Самоподобные множества.....	19
1.3. Примеры несамоподобных множеств .....	25
1.4. Сведения, необходимые для изучения фрактальной геометрии .....	27
1.4.1. Системы счисления .....	27
1.4.2. Множества и метод математической индукции.....	42
1.4.3. Комплексные числа.....	49
1.5. Геометрическая прогрессия и геометрия фракталов .....	57
1.6. Метод итераций и школьная математика .....	66
1.7. Метод итераций и сжимающие отображения.....	73
1.8. Орбита точки, неподвижные и периодические точки.....	83
1.9. Метод итераций и тентообразная функция.....	87
1.10. Характеристика множества Кантора с помощью тентообразной функции.....	94
<i>Глава 2</i>	
<b>Второй шаг на пути к фракталам .....</b>	<b>102</b>
2.1. Обобщение понятия «фрактал» с помощью размерности Минковского.....	102
2.2. Интеграция математики с информатикой .....	110
2.3. Математическая логика и информатика.....	112

2.4. Множества, математическая индукция, теория чисел и информатика.....	118
2.5. Алгебраические уравнения и информатика.....	123
2.6. Геометрия и информатика .....	130
2.7. Исследование функций и информатика .....	138
2.8. Фрактальная геометрия и информатика.....	142
2.8.1. Построение фракталов с помощью L-систем и ИКТ.....	142
2.8.2. Построение фракталов с помощью аффинных преобразований и ИКТ.....	149
2.8.3. Построение заполняющих множеств Жюлиа с помощью ИКТ .....	158
2.8.4. Построение множеств Мандельброта с помощью ИКТ .....	163

### **Глава 3**

<b>Третий шаг на пути к фракталам .....</b>	<b>168</b>
3.1. История создания фракталов .....	168
3.2. Приложения фрактальной геометрии.....	172
3.3. Эстетика фрактальной геометрии.....	180

<b>Литература.....</b>	<b>186</b>
------------------------	------------

### **Приложение 1**

<b>Четвертый шаг на пути к фракталам .....</b>	<b>188</b>
I. Обобщение понятия самоподобия.....	188
II. Метрические пространства .....	192
III. Топологические пространства .....	196
IV. Определение топологической размерности.....	200
Литература к приложению 1 .....	206

### **Приложение 2**

<b>Пятый шаг на пути к фракталам.....</b>	<b>207</b>
I. Вычисление топологической размерности.....	207
II. Размерность Хаусдорфа—Безиковича. Определение фрактала по Мандельброту.....	211

---

III. Размерности Минковского и Хаусдорфа для некоторых компактных множеств.....	217
IV. Сравнение топологической размерности с размерностью Хаусдорфа.....	219
Литература к приложению 2 .....	223
<b>Приложение 3</b>	
<i>Вычисление фрактальных размерностей некоторых множеств на вещественной прямой и вещественной плоскости.....</i>	<b>224</b>
Литература к приложению 3 .....	237
<b>Приложение 4</b>	
<i>Использование информационных технологий и математических методов при построении и исследовании фракталов .....</i>	<b>238</b>
Литература к приложению 4 .....	247
<b>Приложение 5</b>	
<i>Фрактальные методы в физике и экономике .....</i>	<b>248</b>
Литература к приложению 5 .....	255