

А. Н. ПОЛИЛОВ

ЭТЮДЫ  
ПО МЕХАНИКЕ  
КОМПОЗИТОВ



А. Н. ПОЛИЛОВ

*ЭТЮДЫ*  
**ПО МЕХАНИКЕ  
КОМПОЗИТОВ**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2016

УДК 620.1+539.3/.6;  
ББК 22.37+30.3+30.6  
П 50

Полилов А.Н. **Этюды по механике композитов.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 320 с. — ISBN 978-5-9221-1617-6.

Монография посвящена фундаментальным проблемам механики композитов, построению оригинальных моделей разрушения волокнистых композитов с полимерной матрицей. Название книги отражает доступность изложенного материала для широкого читателя, поэтому иллюстрациями новых подходов к построению критериев прочности служат простые примеры проектного расчета и оптимизации типовых элементов композитных конструкций.

Для научных работников, аспирантов и студентов классических и технических университетов, занимающихся проблемами создания и применения композитных материалов в различных отраслях машиностроения.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	8
Список принятых обозначений . . . . .	10
Введение в мир композитов . . . . .	16
<b>1. Этюд о тензорах, законе Гука и числе 21 в теории упругости анизотропного тела . . . . .</b>	<b>23</b>
1.1. Обобщенный закон Гука в тензорной и матричной формах . . . . .	24
1.2. Классы упругой симметрии, число независимых упругих констант . . . . .	27
1.3. Связь тензорных, матричных и технических модулей упругости . . . . .	30
1.4. Преобразование тензоров и матриц упругих модулей и податливостей при повороте системы координат . . . . .	32
Приложение 1 к разделу 1.1 о задачах теории упругости . . . . .	34
Приложение 2 к разделу 1.1 о малых и логарифмических деформациях . . . . .	35
Приложение 3 к разделу 1.3 о понятии тензора и технической сдвиговой деформации . . . . .	36
<b>2. Этюды об испытаниях на растяжение . . . . .</b>	<b>39</b>
2.1. Особенности испытаний композитов на растяжение . . . . .	39
2.2. Корректность определения модуля сдвига при растяжении . . . . .	40
2.3. Этюд об ограничениях на коэффициенты Пуассона . . . . .	42
Приложение 1 к разделу 2.1 о концентрации напряжений около захватов . . . . .	44
<b>3. Три секрета прочности волокнистых композитов . . . . .</b>	<b>50</b>
3.1. Первый секрет — масштабный эффект прочности волокон . . . . .	50
3.2. Второй секрет — остановка трещины поверхностью раздела . . . . .	51
3.3. Третий секрет — статистический характер прочности волокон . . . . .	55
Приложение 1 к разделу 3.1 о линейной механике разрушения . . . . .	58
Приложение 2 к разделу 3.2 об асимптотическом решении задачи про остановку трещины поверхностью раздела . . . . .	58
Приложение 3 к разделу 3.2 о роли касательных напряжений . . . . .	61
Приложение 4 к разделу 3.2 о рациональных свойствах волокнистых композитов . . . . .	61
Приложение 5 к разделу 3.2 о расщеплении около продольных эллиптических трещин . . . . .	62
Приложение 6 к разделу 3.3 о распределении Вейбулла . . . . .	63
<b>4. Четыре этюда о секундомере и методах определения модулей сдвига . . . . .</b>	<b>65</b>
4.1. Этюд о перекашивании пластин . . . . .	65
4.2. Этюд о жестком шарнирном четырехзвеннике . . . . .	68
4.3. Этюд об определении двух модулей сдвига с помощью одного секундомера . . . . .	68
4.4. Этюд о кручении плоских образцов и замечание о кручении квадратной пластины . . . . .	70

Приложение 1 к разделам 4.3, 4.4 об учете влияния захватов . . . . .	72
Приложение 2 к разделам 4.3, 4.4 об уточненной аппроксимации крутильной жесткости . . . . .	73
<b>5. Пять этюдных задач о прочности при сжатии . . . . .</b>	<b>74</b>
5.1. Этюд об образовании кинка при сжатии . . . . .	75
5.2. Этюдная задача о замедленном разрушении композитов при сжатии в результате внутреннего выпучивания слоев или волокон . . . . .	77
5.3. Энергетическое условие расслоения и этюдная задача о выщелкивании слоев . . . . .	81
5.4. Задача о множественном расщеплении при сжатии . . . . .	86
5.5. Оценки опасности продольных дефектов при сжатии композитов . . . . .	89
Приложение 1 к разделу 5.4 о моделях чередующегося разрушения однонаправленных композитов и оценке характерного размера дефекта . . . . .	93
Приложение 2 к разделу 5.5 об условиях роста внутренних расслоений . . . . .	98
<b>6. Шесть этюдов об особенностях испытаний композитов на изгиб . . . . .</b>	<b>103</b>
6.1. Учет «сползания» с опор . . . . .	104
6.2. Изгиб профилированных образцов и сегментов колец . . . . .	106
6.3. Изгиб разномодульных материалов . . . . .	109
6.4. Метод оценки межслойного модуля сдвига по поправке к прогибу . . . . .	112
6.5. Критерий расслоения композитных балок при изгибе . . . . .	113
6.6. Масштабный эффект при изгибе . . . . .	116
Приложение 1 к разделу 6.5 о межслойной прочности при циклическом изгибе . . . . .	117
Приложение 2 к разделу 6.6 о расслоении при кручении . . . . .	118
Приложение 3 к разделу 6.6 о расслоении при изгибе с кручением . . . . .	119
<b>7. Семь этюдов о накоплении повреждений . . . . .</b>	<b>121</b>
7.1. Этюд об уравнении Пэриса для роста усталостной трещины . . . . .	122
7.2. Этюд о параметре поврежденности . . . . .	123
7.3. Этюд о запаздывающем разрушении однонаправленных композитов при растяжении . . . . .	125
7.4. Этюд о кинетике роста повреждений в матрице . . . . .	126
7.5. Этюд о прочности пучка волокон . . . . .	128
7.6. Этюд о возникновении неустойчивого деформирования («шейки») при пластичности . . . . .	129
7.7. Этюд о третьей стадии ползучести . . . . .	131
Приложение 1 к разделу 7.1 о кинетике роста расслоений . . . . .	131
Приложение 2 к разделу 7.2 о варианте кинетического уравнения для параметра поврежденности . . . . .	132
Приложение 3 к разделам 7.2–7.5 об обобщенной модели накопления повреждений в волокнистом композите . . . . .	134
<b>8. Этюды об эффективных упругих свойствах, послойном методе и «изотропном» композите . . . . .</b>	<b>137</b>
8.1. Оценки Фойгта и Рейсса для эффективных модулей монослоя . . . . .	137
8.2. Послойный метод расчета слоистых пластин . . . . .	139
8.3. Упрощенный послойный метод . . . . .	142

---

8.4. Замечания об упругой «изотропии» волокнистых композитов . . . . .	144
8.5. Метод суммирования прочностей и оценка «изотропной» прочности . . . . .	146
<b>9. Этюд о диаграммах Цая для оценки упругих и прочностных свойств композитов . . . . .</b>	<b>150</b>
9.1. Диаграммы для оценки модуля упругости композитов со схемой симметричной укладки волокон в четырех направлениях . . . . .	150
9.2. Диаграмма для модуля сдвига . . . . .	152
9.3. Диаграммы для оценки упругих свойств при других схемах армирования . . . . .	153
9.4. Диаграммы для оценки прочностных свойств . . . . .	153
<b>10. Этюд о наследственной теории ползучести и дробных производных . . . . .</b>	<b>155</b>
10.1. Испытания на ползучесть и релаксацию . . . . .	156
10.2. Модели вязкоупругости . . . . .	157
10.3. К понятию дробных производных . . . . .	160
10.4. Подобие изохрон. Кривая мгновенного деформирования . . . . .	161
10.5. Элементы наследственной теории ползучести Больцмана–Вольтерры–Работнова . . . . .	163
Приложение 1 к разделу 10.5 о наследственности в науке и в жизни . . . . .	165
<b>11. Этюды о динамических испытаниях и пробивании композитных пластин . . . . .</b>	<b>169</b>
11.1. Методы динамических испытаний композитов . . . . .	169
11.2. Испытания на пробивание . . . . .	171
11.3. Распространение упругих волн . . . . .	174
11.4. Коэффициент динамичности . . . . .	175
<b>12. Этюды об эллипсоиде, «диванной подушке» и критериях прочности . . . . .</b>	<b>177</b>
12.1. Тензорно-полиномиальные критерии прочности и подход Работнова . . . . .	177
12.2. Критерии прочности, учитывающие направленный характер разрушения волокнистых композитов . . . . .	183
12.3. Критерии прочности композитных труб . . . . .	189
<b>13. Этюды о «китайском фонарике» и о расщеплении звена бамбука . . . . .</b>	<b>197</b>
13.1. Множественное расщепление композитных труб при сжатии . . . . .	197
13.2. Условие равнопрочности и рациональное проектирование . . . . .	200
13.3. Выщелкивание полоски при изгибе . . . . .	201
13.4. Расщепление композитных труб при кручении . . . . .	202
13.5. Бамбук как оптимальный биокомпозит . . . . .	205
Приложение 1 к разделу 13.4 о депланации при кручении расщепленной тонкостенной трубы . . . . .	206
<b>14. Этюд об армированном баллоне наименьшего веса . . . . .</b>	<b>213</b>
14.1. Эффективность композитных баллонов для газового топлива . . . . .	213
14.2. Расчет несущей способности по критериям для пар слоев . . . . .	214
14.3. Рациональное проектирование баллона — нитяная аналогия . . . . .	216

<b>15. Этюд о преимуществах композитного карданного вала . . . . .</b>	218
15.1. Основные требования к валу . . . . .	218
15.2. Пример выбора угла намотки по одному из критериев . . . . .	220
15.3. Примеры приближенного расчета вала . . . . .	221
Приложение 1 к разделу 15.1 о форме потери устойчивости тонкостенной трубы при кручении . . . . .	222
<b>16. Этюды о намоточном торсионе и других упругих элементах из стеклопластика . . . . .</b>	225
16.1. Торсион из стеклопластика — лучший накопитель упругой энергии . . . . .	225
16.2. Пружины из волнистых листов . . . . .	227
16.3. Бампер из стеклопластика — упругий поглотитель энергии . . . . .	229
Приложение 1 к разделу 16.2 о расчете перемещений разрезных и цельных колец . . . . .	231
<b>17. Этюды о проектном расчете композитных малолистовых рессор . . . . .</b>	235
17.1. Особенности рационального проектирования упругих элементов в виде профилированных балок равного сопротивления . . . . .	235
17.2. Этюд об одной третьей . . . . .	238
17.3. Иллюстрация понятия «равнопрочная» балка . . . . .	240
17.4. Влияние «неидеальных» концов на общие размеры рессор . . . . .	240
17.5. Пять способов повышения долговечности рессоры . . . . .	241
Приложение 1 к разделам 17.1, 17.5 об оценке влияния разориентации волокон на жесткость и прочность профилированных композитных элементов . . . . .	242
<b>18. Этюд об изгибно-крутильной потере устойчивости . . . . .</b>	251
18.1. Упрощенные зависимости модулей от угла армирования . . . . .	252
18.2. Уточненная зависимость модуля сдвига . . . . .	254
18.3. Зависимости эффективных модулей от доли продольных слоев . . . . .	255
<b>19. Этюды о механизмах сбрасывания концентрации напряжений: о расщеплении около отверстий, об оставшейся мелкой выточке, о «затуплении» надрезов перед разрушением . . . . .</b>	257
19.1. Условия расщепления композитов вблизи отверстий и выточек . . . . .	258
19.2. Модель оставшейся выточки и оценка предельного коэффициента концентрации напряжений в расщепляющихся композитах . . . . .	263
19.3. Введение характерного размера материала для описания масштабного эффекта прочности . . . . .	265
19.4. Модели двухстадийного разрушения растрескивающихся композитов около отверстий или надрезов . . . . .	269
19.5. Влияние отверстий и выточек на прочность псевдопластичных композитов . . . . .	273
Приложение 1 к разделу 19.3 о градиентной гипотезе, характерном размере и статистической теории прочности . . . . .	276
<b>20. Этюд о заклепках и «гвоздях» . . . . .</b>	285
20.1. Анализ традиционных мест крепления . . . . .	285
20.2. Четыре вида разрушения и устойчивое смятие под заклепкой . . . . .	287

20.3. Рациональное проектирование «равнопрочных» заклепочных соединений. . . . .	290
20.4. Предельный коэффициент реализации прочности . . . . .	291
<b>21. Этюд о структуре сучка . . . . .</b>	<b>294</b>
21.1. Биомеханические принципы создания равнонапряженных структур армирования . . . . .	295
21.2. Проектирование мест крепления с применением криволинейных траекторий укладки волокон . . . . .	296
Заключение . . . . .	303
Послесловие . . . . .	305
Список литературы . . . . .	306
Предметный указатель . . . . .	311
Авторский указатель . . . . .	314