



УЧЕБНИКИ ВШЭ



А.П. КОЛДАНОВ

П.А. КОЛДАНОВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА





УЧЕБНИКИ ВШЭ



А.П. КОЛДАНОВ
П.А. КОЛДАНОВ

**ТЕОРИЯ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА**



ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ

МОСКВА, 2023

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я7
К60



<https://elibrary.ru/ebozfp>

Рукопись подготовлена в рамках грантового проекта НИУ ВШЭ
по изданию авторских учебников

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор факультета экономических наук
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

А.С. Шведов;

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической
статистики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Ю.С. Хохлов

Колданов, А. П., Колданов, П. А.

К60 Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебник /
А. П. Колданов, П. А. Колданов ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономи-
ки». — М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2023. — 245, [3] с. —
(Учебники Высшей школы экономики). — 600 экз. — ISBN 978-5-7598-2544-9
(в пер.). — ISBN 978-5-7598-2829-7 (e-book).

В учебнике изложены основные разделы теории вероятностей и мате-
матической статистики, составляющие базовый курс этого предмета. Особен-
ность учебника заключается в равномерном распределении материала теории
вероятностей и математической статистики. Сделан акцент на построении и
анализе вероятностных моделей. При изложении математической статистики
уделено внимание свойствам процедур статистического вывода. Излагается
современный метод построения тестов, основанный на p -значениях. Выделен
круг задач, для которых возможно построение оптимальных процедур статисти-
ческого анализа. Все основные понятия и результаты проиллюстрированы
подробно рассмотренными примерами. В конце каждой главы приведены за-
дачи для самостоятельного решения.

Для студентов вузов и всех, кто хочет овладеть методами теории вероят-
ностей и математической статистики.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я7

Опубликовано Издательским домом Высшей школы экономики
<http://id.hse.ru>

doi:10.17323/978-5-7598-2544-9

ISBN 978-5-7598-2544-9 (в пер.)
ISBN 978-5-7598-2829-7 (e-book)

© Национальный исследовательский
университет «Высшая школа
экономики», 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Введение	11
Глава 1. Случайные события. Вероятность	14
1.1. Вероятностное пространство	14
1.1.1. Пространство элементарных исходов и случайные события	14
1.1.2. Операции над событиями	16
1.1.3. Алгебра. σ -алгебра	17
1.1.4. Аксиоматика теории вероятностей	19
1.2. Способы задания вероятности	20
1.2.1. Классический способ задания вероятности	20
1.2.2. Дискретное вероятностное пространство	23
1.2.3. Геометрический способ задания вероятности.	25
1.2.4. Абсолютно непрерывное вероятностное пространство.	27
1.2.5. Частота и вероятность.	28
1.3. Простейшие формулы теории вероятностей.	29
1.3.1. Простейшие следствия из аксиом.	29
1.3.2. Теорема сложения	30
1.3.3. Условная вероятность и ее свойства.	32
1.3.4. Теорема умножения.	34
1.3.5. Формула полной вероятности и формула Байеса.	35
1.4. Независимость случайных событий.	37
1.4.1. Независимые события и их свойства	37
1.4.2. Типы связи между случайными событиями.	39
1.4.3. Независимость в совокупности.	40
1.4.4. Биномиальное распределение	41
1.4.5. Схема Бернулли.	42
1.5. Задачи к главе 1	44
Глава 2. Случайные величины. Распределения	47
2.1. Случайные величины	47
2.1.1. Определение случайной величины на дискретном вероятностном пространстве	47
2.1.2. Типичные дискретные случайные величины	48
2.1.3. Определение случайной величины на произвольном вероятностном пространстве	51
2.2. Функция распределения	54
2.2.1. Свойства функции распределения	54
2.2.2. Разложение функции распределения и типы случайных величин	57

2.3. Дискретные случайные величины	59
2.4. Непрерывные случайные величины	60
2.4.1. Свойства плотности распределения	60
2.4.2. Типичные непрерывные случайные величины	61
2.4.3. Вывод распределения случайного времени работы сложной системы без учета эффекта усталости	62
2.5. Многомерные распределения	65
2.5.1. Свойства многомерной функции распределения	66
2.5.2. Типичные случайные векторы	69
2.6. Типы связи случайных величин	71
2.6.1. Маргинальное распределение	72
2.6.2. Независимость случайных величин	74
2.6.3. Стохастическая связь	75
2.6.4. Функции случайной величины	78
2.7. Функции случайного вектора	80
2.7.1. Распределение суммы. Формула свертки	81
2.7.2. Распределение отношения	82
2.8. Задачи к главе 2	85
Глава 3. Числовые характеристики	87
3.1. Математическое ожидание	87
3.1.1. Свойства математического ожидания	90
3.2. Дисперсия	92
3.2.1. Свойства дисперсии	93
3.3. Неравенство Чебышева	96
3.4. Закон больших чисел	98
3.5. Моменты распределения и другие характеристики	99
3.6. Числовые характеристики случайного вектора	101
3.6.1. Свойства ковариации	101
3.6.2. Коэффициент корреляции и его свойства	103
3.7. Условное математическое ожидание	105
3.8. Задачи к главе 3	109
Глава 4. Предельные теоремы	112
4.1. Предельные теоремы в схеме Бернулли	112
4.1.1. Предельный переход от гипергеометрической формулы к биномиальной формуле	112
4.1.2. Теорема Пуассона	114
4.1.3. Теоремы Муавра–Лапласа	115
4.2. Характеристические функции	116
4.3. Центральная предельная теорема	120
4.4. Задачи к главе 4	123

Глава 5. Выборка и ее характеристики	125
5.1. Задачи математической статистики	125
5.2. Статистическая структура и выборка	127
5.3. Выборочные аналоги функции распределения и моментов	131
5.4. Частота и вероятность	135
5.5. Задачи к главе 5	142
Глава 6. Оценивание	144
6.1. Задача оценивания параметров	144
6.2. Метод моментов	146
6.3. Метод разделяющих разбиений	149
6.4. Оценки максимального правдоподобия	151
6.5. Байесовские оценки	156
6.6. Свойства оценок	157
6.6.1. Несмещенность	158
6.6.2. Эффективность	160
6.6.3. Состоятельность	165
6.6.4. Асимптотическая нормальность	168
6.7. Доверительные интервалы	171
6.7.1. Неравенство Чебышева и доверительные интервалы	171
6.7.2. Доверительный интервал для математического ожидания нормального закона при известной дисперсии	172
6.7.3. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения	175
6.7.4. Асимптотические доверительные интервалы	175
6.8. Асимптотические свойства эмпирической функции распределения	176
6.9. Задачи к главе 6	177
Глава 7. Тесты значимости	181
7.1. Гипотезы и тесты	181
7.2. Доверительные интервалы и проверка гипотез	182
7.3. Тесты значимости и принцип выбора критической области	183
7.4. Критерий χ^2	185
7.5. Критерии Колмогорова и Смирнова	191
7.6. Вероятностное интегральное преобразование	194
7.7. Тесты λ Пирсона	195
7.8. Моделирование случайных величин	200
7.9. Задачи к главе 7	201
Глава 8. Оптимальные тесты	205
8.1. Понятие оптимальности	205
8.2. Фундаментальная лемма Неймана–Пирсона	208

8.3. Равномерно наиболее мощные тесты	215
8.4. Функция мощности	221
8.5. Несмещенность	223
8.6. Тест максимального правдоподобия	231
8.7. Достаточные статистики	234
8.8. Задачи к главе 8	237
Список литературы	239
Предметный указатель	240