



С. В. БОЖОКИН, И. Б. СУСЛОВА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

 «Инфра-Инженерия»

С. В. БОЖОКИН, И. Б. СУСЛОВА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Учебное пособие

Москва Вологда
«Инфра-Инженерия»
2025

УДК 53:51
ББК 22.311
Б76

Рецензенты:

чл.-корр. РАН, профессор, д. ф.-м. н. (Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе,
г. Санкт-Петербург) *Быков Андрей Михайлович*;
профессор, д. ф.-м. н. (Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого, Физико-механический институт, Высшая школа фундаментальных
физических исследований) *Соколов Игорь Михайлович*

Божокин, С. В.

Б76 Математическая физика для инженеров: теория и практика : учебное пособие / С. В. Божокин, И. Б. Суслова. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2025. – 608 с. : ил., табл.
ISBN 978-5-9729-2553-7

Рассматриваются дифференциальные операции в различных системах координат. Показано решение задач Штурма-Лиувилля для нахождения собственных значений и собственных функций. Приведены постановки задач для уравнений в частных производных. Выполнена классификация этих уравнений. Изложены основные специальные функции математической физики: полиномы Эрмита, Лежандра, Чебышева, а также функции Бесселя и Макдональда. Рассматриваются применения специальных функций для решения уравнений математической физики. Изучаются различные виды преобразований Фурье и Лапласа. Излагаются основные разделы вариационного исчисления.

Для студентов направлений подготовки 01.03.02 «Физика» (физика атомного ядра и элементарных частиц, физика космических и плазменных явлений, биофизика), 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», 03.03.01 «Прикладная математика» и 03.04.01 «Прикладная физика». Книга будет полезна для аспирантов и научных работников, специализирующихся в постановке и решении задач математической физики.

УДК 53:51
ББК 22.311

ISBN 978-5-9729-2553-7

© Божокин С. В., Суслова И. Б., 2025
© Издательство «Инфра-Инженерия», 2025
© Оформление. Издательство «Инфра-Инженерия», 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ 1	7
Глава 1. Введение	7
1.1. Предмет математической физики	7
1.2. Системы координат	10
1.3. Скалярное произведение векторов. Евклидово пространство	14
1.4. Векторное, смешанное и двойное векторное произведение	21
1.5. Тензорное исчисление	23
1.6. Векторный анализ в декартовой системе координат	26
1.7. Криволинейные координаты. Дифференциальные операции в цилиндрической и сферической системах координат	32
Глава 2. Задачи Штурма-Лиувилля в математической физике	42
2.1. Дифференциальные уравнения математической физики	42
2.2. Метод характеристик решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных	51
2.3. Одномерная дельта-функция Дирака	58
2.4. Ортогональность функций непрерывного спектра. Многомерные дельта-функции	68
2.5. Гильбертово пространство. Скалярное произведение комплексных функций	72
2.6. Операторы в Гильбертовом пространстве	78
2.7. Ряды Фурье	84
2.8. Задача Штурма-Лиувилля о нахождении собственных значений и собственных функций уравнений математической физики	110
2.9. Задача Штурма-Лиувилля для нахождения собственных значений энергии и собственных функций одномерной бесконечной ямы	117
2.10. Задача Штурма-Лиувилля нахождения собственных значений и собственных функций одномерной потенциальной ямы конечной высоты	120
Глава 3. Уравнения математической физики	131
3.1. Уравнения гиперболического типа. Колебания струны и мембраны	131
3.2. Колебания бесконечной струны	138
3.3. Метод Фурье разделения переменных для уравнения колебаний закрепленной струны	142
3.4. Колебания закрепленной струны под действием внешних сил	156
3.5. Колебания закрепленной струны в среде с трением	163
3.6. Электрические колебания в длинных однородных линиях	167
3.7. Уравнения параболического типа. Уравнение теплопроводности в одномерном стержне	173
3.8. Трехмерное уравнение теплопроводности. Граничные и начальные условия. Уравнение диффузии	178

3.9. Распространение тепла в бесконечном одномерном стержне.....	184
3.10. Распространение тепла в ограниченном одномерном стержне.....	191
3.11. Решение уравнения Пуассона для скалярного потенциала в электростатике.....	202
3.12. Единственность решения уравнения Пуассона. Задача Дирихле для полупространства.....	210
3.13. Уравнение Пуассона для сферы. Задача Дирихле. Функция Грина для сферы.....	215
3.14. Классификация уравнений математической физики. Примеры уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типа.....	220
3.15. Приведение к каноническому виду линейных уравнений математической физики с двумя переменными.....	228
Глава 4. Специальные функции математической физики.....	240
4.1. Гамма- и бета-функции.....	240
4.2. Метод перевала. Формула Стирлинга. Объем n -мерной сферы.....	244
4.3. Функция ошибок.....	248
4.4. Задача Штурма-Лиувилля для гармонического осциллятора.....	253
4.5. Полиномы Эрмита. Свойства полиномов Эрмита.....	261
4.6. Полиномы Лежандра.....	277
4.7. Присоединенные полиномы Лежандра.....	291
4.8. Полиномы Чебышева первого и второго рода.....	295
4.9. Цилиндрические функции. Функции Бесселя целого индекса.....	305
4.10. Функции Бесселя с произвольным значением индекса.....	318
4.11. Функция Бесселя полуцелого индекса вещественного аргумента. Модифицированные функции Бесселя.....	322
Список литературы к части I.....	330
ЧАСТЬ 2.....	334
Глава 5. Применение специальных функций в уравнениях математической физики.....	334
5.1. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат.....	334
5.2. Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат.....	348
5.3. Краевая задача для нахождения электростатического поля в ограниченном цилиндре.....	354
5.4. Краевая задача о нахождении стационарного температурного поля в ограниченном цилиндре.....	358
5.5. Нестационарная задача теплопроводности для бесконечного однородного цилиндра и шара. Колебания круглой мембраны.....	365
5.6. Краевая задача для уравнения Гельмгольца в бесконечном цилиндре.....	380

5.7. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца в сферической системе координат.....	383
5.8. Задача Штурма-Лиувилля для нахождения собственных чисел и собственных функций уравнения Шредингера для двумерной потенциальной ямы.....	392
5.9. Задача Штурма-Лиувилля для нахождения собственных значений и собственных функций уравнения Шредингера для трехмерной потенциальной ямы.....	397
Глава 6. Интегральные преобразования.....	403
6.1. Формулы Сохоцкого.....	403
6.2. Интегральные преобразования Фурье.....	405
6.3. Преобразования Фурье вещественных функций одной переменной.....	411
6.4. Многомерные преобразования Фурье.....	419
6.5. Преобразование Фурье в цилиндрической и сферической системах координат.....	428
6.6. Свертка. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений.....	435
6.7. Фундаментальное решение уравнения Шредингера для свободного движения частицы.....	456
6.8. Преобразование Фурье-Бесселя.....	461
6.9. Преобразование Лапласа.....	465
6.10. Формула обращения Римана-Меллина.....	483
6.11. Применение преобразования Лапласа при решении обыкновенных дифференциальных уравнений.....	494
6.12. Применение преобразований Фурье и Лапласа к решению задач математического физики для уравнений параболического типа в полубесконечном пространстве.....	499
6.13. Применение преобразований Лапласа для решения задач математической физики для случая ограниченной среды.....	510
Глава 7. Интегральные уравнения.....	517
7.1. Введение в теорию интегральных уравнений.....	517
7.2. Интегральные уравнения Вольтерра.....	524
7.3. Интегральные уравнения Фредгольма. Уравнения Фредгольма с вырожденным ядром.....	540
7.4. Уравнения Фредгольма II рода с ядром $K(x - y)$, зависящим от разности аргументов $x - y$. Итерационный метод решения интегральных уравнений.....	552
7.5. Решение интегрального уравнения Шредингера для дискретного спектра атома водорода.....	562
Глава 8. Основные понятия вариационного исчисления.....	567
8.1. Определение вариационной задачи.....	567
8.2. Лемма Лагранжа. Уравнения Эйлера.....	573

8.3. Вариация функции и вариация функционала	586
8.4. Вариационная задача для функционалов, содержащих производные высоких порядков.....	588
8.5. Вариационная задача функционалов, заданных на парах функций.....	589
8.6. Вариационные задачи функционалов, заданных на вектор-функциях.....	590
8.7. Вариационные задачи для функционалов, заданных на функциях многих переменных.....	592
8.8. Вариационные задачи на условный экстремум.....	595
8.9. Вариационная задача с подвижными границами. Условие трансверсальности.....	601
8.10. Прямые методы вариационного исчисления.....	602
8.11. Применение прямых методов в краевых задачах для уравнений в частных производных.....	603
Список литературы к части 2.....	605