

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

П.С. Шпаков, Ю.Л. Юнаков

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОБРАБОТКА
РЕЗУЛЬТАТОВ
ИЗМЕРЕНИЙ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

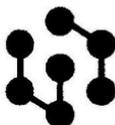


СИБИРСКИЙ
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

SIBERIAN
FEDERAL
UNIVERSITY

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

серия основана в 1996 г.



СИБИРСКИЙ | SIBERIAN
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ | FEDERAL
УНИВЕРСИТЕТ | UNIVERSITY

П.С. ШПАКОВ
Ю.Л. ЮНАКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Допущено Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по образованию в области горного дела в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки (специальности) «Горное дело» и «Физические процессы горного или нефтегазового производства», рег. номер 51-16/414

Москва
ИНФРА-М

Красноярск
СФУ

2025

УДК 622+51(075.8)

ББК 33:22я73

Ш83

Рецензенты:

Ю.И. Кутепов, д-р техн. наук, профессор, заведующий лабораторией гидрогеологии и экологии Научного центра геомеханики и проблем горного производства Национального минерально-сырьевого университета «Горный»;

В.В. Руденко, д-р техн. наук, профессор кафедры маркшейдерского дела и геодезии Московского государственного горного университета

Шпаков П.С.

Ш83 Математическая обработка результатов измерений : учебное пособие / П.С. Шпаков, Ю.Л. Юнаков. — Москва : ИНФРА-М ; Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2025. — 409 с. — (Высшее образование).

ISBN 978-5-16-020497-0 (ИНФРА-М)

ISBN 978-5-7638-3077-4 (СФУ)

В первом разделе учебного пособия изложены основные сведения о теории вероятностей и статистической обработке результатов измерений, способах расчета ковариационных, корреляционных связей и регрессивном анализе. Второй раздел посвящен теории погрешностей измерений и методу наименьших квадратов, приведены принципы и методы уравнивания маркшейдерско-геодезических сетей, основанные на реализации метода наименьших квадратов.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки (специальности) «Горное дело» и «Физические процессы горного или нефтегазового производства». Может быть полезно для студентов всех специальностей горного профиля, изучающих геодезию и маркшейдерское дело.

УДК 622+51(075.8)

ББК 33:22я73

ISBN 978-5-16-020497-0 (ИНФРА-М)

ISBN 978-5-7638-3077-4 (СФУ)

© Шпаков П.С.,
Юнаков Ю.Л., 2014, 2018

© Сибирский федеральный
университет, 2014, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
РАЗДЕЛ I	7
1. Сведения о теории вероятностей	7
1.1. Предмет теории вероятностей. Случайные события	7
1.1.1. Классическое и статистическое определение вероятности	8
1.1.2. Виды случайных событий	9
1.1.3. Теорема сложения вероятностей	10
1.1.4. Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность	11
1.1.5. Вероятность появления хотя бы одного из событий	13
1.1.6. Принцип практической невозможности маловероятных событий	13
1.1.7. Формула полной вероятности. Вероятность гипотез	14
1.1.8. Многократные испытания. Формула Бернулли	15
1.1.9. Локальная теорема Лапласа	16
1.1.10. Интегральная теорема Лапласа	16
1.2. Случайные величины	17
1.2.1. Закон распределения и числовые характеристики дискретной случайной величины	18
1.2.2. Функция и плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины	20
1.2.3. Числовые характеристики непрерывных случайных величин	23
1.2.4. Закон больших чисел	24
1.3. Законы распределения непрерывных случайных величин	25
1.3.1. Равномерное распределение	25
1.3.2. Нормальное распределение случайной величины	26
1.3.3. Распределения χ^2 и Стьюдента	28
1.4. Элементы математической статистики	30
1.4.1. Понятие о генеральной и выборочной совокупности. Эмпирическая функция распределения	31
1.4.2. Статистические оценки параметров распределения	33
1.4.3. Теория корреляции случайных величин	34
1.4.4. Статистическая проверка гипотез	38
1.5. Многомерные распределения. Случайный вектор	39
1.5.1. Характеристики многомерных распределений. Ковариационная и корреляционная матрицы	40

2. Вариационные ряды и их статистические характеристики	42
2.1. Вариационные ряды и их элементы.....	42
2.2. Среднестатистические характеристики ряда распределения.....	45
2.3. Практическое использование среднестатистических характеристик в горном деле	55
2.4. Описательная статистика на базе пакета анализа данных Excel.....	56
2.4.1. Краткая характеристика встроенного пакета анализа данных	56
2.5. Определение параметров <i>Описательная статистика</i> . Решение в статистическом пакете Statistica 6.1	64
2.6. Графическое изображение вариационных рядов. Моменты распределения	68
2.6.1. Графическое изображение вариационных рядов	68
2.6.2. Моменты ряда распределения	71
2.6.3. Асимметрия и эксцесс.....	73
2.7. Графическое изображение вариационных рядов в Excel	77
2.8. Построение диаграммы в пакете Statistica 6.1	80
3. Сглаживание эмпирических данных.	
Выбор оптимальной зависимости.....	87
3.1. Графическое сглаживание	87
3.2. Аналитическое сглаживание	87
3.3. Использование инструмента анализа <i>Регрессия</i> в пакете анализа данных Excel.....	93
3.4. Выбор наилучшей кривой в пакете Statistica 6.1	97
4. Законы распределения случайных величин.....	99
4.1. Определение случайной величины и закона распределения случайной величины	99
4.2. Законы распределения случайных величин	103
4.2.1. Гауссовское (нормальное) распределение	103
4.2.2. Равномерное (прямоугольное) распределение	104
4.2.3. Экспоненциальное (показательное) распределение	104
4.2.4. Распределение хи-квадрат	105
4.2.5. Распределение Стьюдента	106
4.2.6. Распределение Фишера – Снедекора	107
4.2.7. Биномиальное распределение	108
4.2.8. Распределение Пуассона.....	109
4.3. Понятие о критериях согласия	110
4.3.1. Критерий согласия χ^2 -Пирсона	112
4.3.2. Критерий согласия Колмогорова.....	113
4.4. Нормальный закон распределения.....	115

4.4.1. Проверка соответствия эмпирического распределения нормальному теоретическому распределению с помощью критерия согласия А.Н. Колмогорова	120
4.4.2. Проверка соответствия эмпирического распределения нормальному по показателям асимметрии и эксцесса, критериев знаков, Шовенэ и Шарлье.....	122
4.4.3. Упрощенный способ Линдеберга	125
4.5. Гамма-распределение случайных величин и его оценка.....	126
4.5.1. γ -Распределение	126
4.6. Подгонка распределений в пакете Statistica 6.1.....	132
4.6.1. Подгонка нормального распределения в пакете Statistica 6.1	132
4.6.2. Подгонка γ -распределения в пакете Statistica 6.1	138
5. Понятие о выборочном методе, статистические оценки параметров распределения и проверка статистических гипотез.....	140
5.1. Выборочный метод	140
5.1.1. Генеральная и выборочная совокупности	140
5.1.2. Доверительный интервал и доверительная вероятность.....	141
5.2. Статистические оценки параметров распределения	143
5.2.1. Оценка математического ожидания и дисперсии по выборке	143
5.2.2. Построение доверительного интервала для математического ожидания при известном σ	145
5.2.3. Распределение Стьюдента. Построение доверительного интервала для математического ожидания при неизвестном σ и оценка качества оценок дисперсии.....	147
5.2.4. Установление необходимого числа определений (замеров)	151
5.3. Проверка статистических гипотез.....	151
5.4. Проверка гипотезы о равенстве средних.....	153
5.4.1. Дисперсии генеральной совокупности известны.....	153
5.4.2. При неизвестных значениях σ	155
5.4.3. Парный двухвыборочный t -тест для средних	158
5.5. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей.....	160
5.6. Проверка соответствия результатов измерений установленным допускам.....	162
6. Дисперсионный анализ	163
6.1. Однофакторный дисперсионный анализ.....	163
6.2. Двухфакторный дисперсионный анализ	167

7. Ковариационный и корреляционный анализ	172
7.1. Общие сведения	172
7.2. Оценка надежности коэффициента корреляции.....	173
7.3. Множественная корреляция	174
7.4. Корреляционный анализ в системе Statistica 6.1	180
7.5. Корреляция и ковариация в Microsoft Excel	190
8. Регрессивный анализ	192
8.1. Общие сведения	192
8.2. Оценка по методу наименьших квадратов для линейной модели (НК).....	195
8.3. Доверительные интервалы и критерии для параметров линейной модели.....	199
8.4. Доверительные интервалы для математического ожидания y	200
8.5. Измерение тесноты связи в регрессивном анализе	201
8.6. Расчет линейной регрессии по несгруппированным данным	205
8.7. Решение типовой задачи <i>Регрессия</i> в Microsoft Excel	223
8.8. Анализ регрессионных остатков в Microsoft Excel	228
8.9. Диаграмма рассеяния в системе Statistica 6.1	234
8.10. Простая регрессия в пакете Statistica 6.1	245
8.11. Анализ остатков	254
8.12. Расчет линейной регрессии по сгруппированным данным.....	264
8.13. Расчет линейной регрессии по сгруппированным данным в системе Statistica 6.1.....	271
8.14. Построение аналитической группировки.....	276
8.15. Расчет криволинейной регрессивной связи	285
8.16. Расчет полиномиальной регрессии по сгруппированным данным в системе Statistica 6.1	293
8.17. Множественная регрессия	302
8.18. Определение тесноты связи в случае множественной регрессии.....	306
8.19. Множественная регрессия в пакете Statistica 6.1	307
РАЗДЕЛ II	322
1. Теория погрешностей измерений	322
1.1. Классификация измерений	324
1.2. Виды погрешностей измерений	326
1.2.1 Ошибки округления	328
1.3. Меры точности результатов измерений	329
1.3.1. Среднеквадратическая погрешность. Обработка равноточных измерений.....	329

1.3.2. Обработка неравноточных измерений. Понятие о весе измерений и СКП единицы веса.....	331
1.4. Погрешности функций измеренных величин	333
1.4.1. Средняя квадратическая погрешность и вес арифметических средин.....	334
1.4.2. Определение средней квадратической погрешности единицы веса по отклонениям от арифметических средин	335
1.4.3. Совместное влияние независимых источников погрешностей	336
1.5. Прямая и обратная задачи теории погрешностей измерений	337
1.6. Метод наименьших квадратов.....	339
1.7. Строгое уравнивание многократных измерений одной величины	340
2. Уравнивание геодезических сетей.....	342
2.1. Уравнивание геодезических сетей параметрическим способом	344
2.1.1. Теория параметрического уравнивания	344
2.1.2. Теория параметрического уравнивания в матричном изложении	346
2.2. Составление параметрических уравнений поправок плановых сетей.....	347
2.3. Составление параметрических уравнений поправок при уравнивании вставки пункта в триангуляционную сеть по измеренным расстояниям.....	350
2.4. Оценка точности плановых сетей при параметрическом уравнивании.....	361
2.4.1. Корреляционная матрица координат плановых сетей.....	361
2.4.2. Эллипсы ошибок положения пунктов плановых сетей.....	361
2.4.3. Вычисление параметров эллипса ошибок	366
2.5. Уравнивание геодезических сетей коррелятным способом.....	366
2.5.1. Теория коррелятного уравнивания	367
2.5.2. Теория коррелятного уравнивания в матричном изложении	369
2.6. Коррелятное уравнивание полигонометрических сетей	370
2.6.1. Уравнивание системы полигонометрических ходов методом полигонов	373
2.7. Коррелятное уравнивание триангуляционных сетей.....	376
2.7.1. Число условных уравнений свободных триангуляционных сетей.....	380
2.8. Уравнивание центральной фигуры	380
2.9. Коррелятное уравнивание нивелирных сетей. Метод полигонов	385

2.10. Уравнивание сетей полигонометрических и нивелирных ходов методом узлов.....	388
2.10.1. Уравнивание сети с одной узловой точкой	388
2.10.2. Уравнивание сети с несколькими узловыми точками.....	389
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	391
Приложение А. Плотность вероятности нормального распределения.....	392
Приложение Б. Интегральная функция.....	394
Приложение В. Значение интеграла вероятностей	396
Приложение Г. Односторонняя вероятность распределения χ^2	397
Приложение Д. Квантили распределения χ^2	398
Приложение Е. Распределение для уровня значимости $\alpha = 0,05$	399
Приложение Ж. Значение t-распределения Стьюдента.....	400
Приложение З. Распределение Колмогорова.....	401
Приложение К. Плотность вероятности.....	402