

Ю. Р. Мусин, И. В. Александров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

ГРАВИТАЦИИ, КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ, СУПЕРСИММЕТРИИ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ЯЗЫК ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ для ФИЗИКОВ



URSS

- Алгебро-геометрический дуализм
- Алгебраические методы в теории калибровочных полей
- Расслоенные пространства
- Элементы алгебраической топологии
- Суперпространство
- Элементы алгебраической геометрии
- Категорный язык геометрии

Ю. Р. Мусин, И. В. Александров

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
АППАРАТ
ГРАВИТАЦИИ,
КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ,
СУПЕРСИММЕТРИИ**

**Алгебраический язык
геометрии и топологии
для физиков**



URSS
МОСКВА

Мусин Юрат Рашитович, Александров Игорь Витальевич
Математический аппарат гравитации, калибровочных теорий,
суперсимметрии: Алгебраический язык геометрии и топологии
для физиков. — М.: ЛЕНАНД, 2021. — 512 с.

Широкое внедрение алгебраических методов в теоретическую физику не является новостью. Калибровочные поля и их интерпретация на языке расслоенных пространств, суперсимметричные расширения полевых теорий, возникновение теорий Великого объединения, струнных моделей, квантовой петлевой гравитации — все это ввело в арсенал используемых физиками методов экзотические ранее разделы алгебраической топологии, алгебраической геометрии и даже теории категорий. Большие проблемы возникают перед начинающими физиками, получившими стандартную университетскую подготовку, в которой абстрактная алгебра представлена весьма скромно. Ощущается потребность в компактном путеводителе по современной алгебре для указанной категории читателей. Такая задача не может быть решена в одной книге разумного размера. В силу научных интересов авторов, лежащих в изучении геометрической структуры суперрасширений пространства-времени, было выбрано только одно направление — алгебраические методы изучения геометрических конструкций. При этом мы старались избегать строгого формального подхода, принятого в математических учебниках, то есть цепочек: «определение — теорема — доказательство», а сосредотачивались на смысле вводимых определений, простых примерах, а также сути базовых теорем. Для удобства работы с книгой она снабжена подробным указателем определений и обширным указателем используемых обозначений. Для ориентирования в множестве алгебраических учебников прилагается путеводитель по литературе, рассчитанный на начинающих.

Для чтения книги достаточно базовой подготовки в объеме стандартного курса математики для студентов второго курса университета. Предполагается, что при усвоении содержания книги читатель получает возможность чтения статей, посвященных современным моделям пространства и времени.

Формат 60×90/16. Печ. л. 32. Зак. № АР-8631.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-9710-8859-2

(мягкая обложка)

ISBN 978-5-9710-8860-8

(твердый переплет)

© ЛЕНАНД, 2021



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Глава 1 Алгебро-геометрический дуализм.....	10
1.1 Алгебраические структуры	11
1.2 Топологические структуры	18
1.3 Первый синтез: многообразия и тензоры.....	27
1.3.1 Гладкие многообразия.....	27
1.3.2 Тензоры.....	30
1.3.3 Римановы пространства и тензорные поля.....	35
1.3.4 Тензорные алгебры.....	39
1.4 Физические плоды.....	44
1.4.1 Пространство-время.....	44
1.4.2 Электромагнитное поле на языке форм.....	52
Глава 2 Алгебраические методы в теории калибровочных полей	56
2.1 Первоначальные сведения по теории групп и алгебр Ли	56
2.1.1 Алгебры Ли.....	56
2.1.1.1 Базовые определения.....	56
2.1.1.2 Классификация алгебр Ли.....	60
2.1.1.3 Форма Киллинга	64
2.1.1.4 Структура алгебр Ли.....	66
2.1.2 Группы Ли.....	69
2.1.2.1 Производная Ли.....	70
2.1.2.2 Теория Ли.....	74
2.1.2.3 Классификация групп Ли.....	82
2.1.2.4 Локализация и накрытие групп преобразований ...	85
2.1.2.5 Линейные представления групп Ли.....	90
2.2 Физика калибровочных полей.....	93
2.2.1 Калибровочные преобразования.....	93
2.2.2 Поля Янга-Миллса на языке теории Ли.....	100
2.2.3 Модельные примеры.....	106
2.2.4 Калибровочный подход в гравитации.....	112
Глава 3 Расслоенные пространства.....	118
3.1 Первоначальные сведения.....	118
3.1.1 Расслоения и накрытия.....	118
3.1.2 Главные расслоения.....	121
3.1.3 Расслоения Стиррода.....	126
3.1.4 Ассоциированные расслоения.....	130

3.2	Связности в расслоенных пространствах	134
3.2.1	Формы связности в главном расслоении.....	134
3.2.2	Лифты и ковариантные производные.....	137
3.2.3	Форма кривизны и уравнение Картана.....	141
Глава 4	Элементы алгебраической топологии.....	149
4.1.	Гомологии и комплексы.....	149
4.1.1	Алгебраическое построение комплекса.....	149
4.1.2	Симплициальные гомологии.....	153
4.2.	Гомологические свойства многообразий.....	161
4.2.1	Когомологии и комплекс де Рама	161
4.2.2	Гомотопическая эквивалентность когомологий	170
4.2.3	Последовательность и принцип Майера–Вьеториса.....	174
4.2.4	Когомологии Чеха, комплекс Чеха–де Рама.....	178
4.2.5	Сингулярные и клеточные гомологии.....	184
4.3.	Методы и приложения.....	195
4.3.1	Методы: от гомологий пары к изоморфизму Пуанкаре.....	195
4.3.2	Гомотопии и гомологии – основные связи.....	203
4.3.3	Характеристические классы.....	212
4.3.4.	Монополь Дирака.....	217
4.3.4.1	Физическая модель.....	217
4.3.4.2	Математические конструкции.....	220
Глава 5	Суперпространство.....	225
5.1	Алгебра Клиффорда.....	226
5.2	Алгебра Грассмана	230
5.3	Элементы псевдоклассической механики.....	236
5.4	Супервремя.....	244
Глава 6	Элементы алгебраической геометрии.....	252
6.1	Вводный очерк.....	252
6.2	Коммутативная алгебра.....	261
6.2.1	Коммутативные кольца и условие нётеровости.....	262
6.2.2	Модули над коммутативными кольцами.....	273
6.2.3	Алгебры над коммутативными кольцами и полями.....	283
6.3	На пути к схемам.....	291
6.3.1	Спектр кольца.....	292
6.3.2	Топология Зарисского.....	299
6.3.3	Пучки и окольцованные пространства.....	315
6.3.4	Схемы и роль нильпотентов.....	329
6.4	Квантовые группы и некоммутативная геометрия	341

Глава 7 Категорный язык геометрии	349
7.1 Категории и функторы	349
7.2 Свойство универсальности и основные понятия	361
7.3 Абелевы категории	387
7.4 Категория супермногообразий	398
7.5 Топосы и геометрия пространства и времени.....	409
Дополнительные главы «Гам, за облаками...»	414
Д.1 Алгебраическая топология.....	414
Д.1.1 Формулы универсальных коэффициентов и когомологии с коэффициентами в пучке	414
Д.1.2 Пространства Эйленберга–Маклейна и теории препятствий.....	423
Д.2 Спектральные последовательности.....	436
Д.2.1 Гомологическая спектральная последовательность.....	436
Д.2.2 Когомологический вариант, применения к расслоениям и функториальность	447
Д.2.3 Практические примеры и метод Серра.....	457
Библиографический список	466
Путеводитель по литературе.....	476
Указатель определений.....	483
Указатель обозначений	498
Именной указатель.....	507

Рекомендуемые маршруты чтения:

- *Первое чтение:*
Глава 1, Глава 2 (2.1.1.1, 2.1.2.1, 2.2.1), Глава 3 (3.1.1, 3.1.2, 3.2.1).
Глава 4 (4.1, 4.2.1), Глава 5 (5.1, 5.2), Глава 6 (6.1, 6.4), Глава 7 (7.1).
- *Рабочий уровень практикующего физика:*
Глава 1, Глава 2, Глава 3, Глава 4 (4.1, 4.2, 4.3.3, 4.3.4), Глава 5,
Глава 6 (6.1, 6.2, 6.4).
- *За пределами стандартного университетского курса для физиков:*
Глава 3, Глава 4, Глава 6, Глава 7, Дополнительные главы Д.1 и Д.2.
- *Физические приложения:*
1.4; 2.2; 4.3.4; 5.3; 5.4; 6.4; 7.5.