

В. А. Кудинов, И. В. Кудинов

---

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ *и*  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ  
ПЕРЕНОСА**

**ТЕПЛА  
МАССЫ  
ИМПУЛЬСА**



URSS

---

**В. А. Кудинов, И. В. Кудинов**

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ  
И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ  
ПЕРЕНОСА ТЕПЛА,  
МАССЫ, ИМПУЛЬСА**

Под редакцией  
заслуженного деятеля науки РФ,  
доктора физико-математических наук,  
профессора *Э. М. Карташова*



**URSS**

**МОСКВА**

**Кудинов Василий Александрович, Кудинов Игорь Васильевич**  
**Методы решения параболических и гиперболических уравнений переноса**  
**тепла, массы, импульса / Под ред. Э. М. Карташова. — М.: ЛЕНАНД, 2017. — 336 с.**

Известно, что точные аналитические решения рассматриваемых в книге уравнений в настоящее время получены лишь для задач в упрощенной математической постановке, когда не учитываются многие важные характеристики процессов. Все это приводит к существенному отклонению математических моделей от реальных физических процессов, протекающих в конкретных энергетических установках. В связи с этим большой интерес представляют методы прикладной математики, позволяющие получать решения с точностью, достаточной для инженерных приложений.

Авторы настоящей книги под руководством Заслуженного деятеля науки РФ, доктора физико-математических наук, профессора Э. М. Карташова исследуют инженерные методы построения решений задач стационарной и нестационарной теплопроводности, позволяющие получать эффективные аналитические решения для однослойных и составных конструкций. При определении собственных чисел вводятся дополнительные граничные условия, получаемые из дифференциального уравнения краевой задачи Штурма—Лиувилля путем его дифференцирования в граничных точках. С помощью интегрального метода теплового баланса на основе определения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий получены аналитические решения задач теплопроводности с переменными начальными условиями, с переменными во времени граничными условиями и внутренними источниками теплоты, нелинейных задач теплопроводности. С использованием теории обобщенных функций рассмотрены методы получения решений краевых задач теплопроводности для многослойных конструкций.

В книге представлены результаты получения и анализа точных аналитических решений гиперболических уравнений, описывающих распространение тепловой и гидравлической волны с конечной скоростью, колебательные процессы в твердых телах и упругих жидкостях, включая гидравлический удар. Приведены решения динамических задач термоупругости.

Материал издания отражает передовое состояние научной мысли в исследуемой области, он представляет несомненный интерес для научно-технических работников, специализирующихся в области математики и теплофизики, а также для преподавателей и студентов технических вузов.

**Рецензенты:** д-р физ.-мат. наук, проф. *В. П. Радченко* (кафедра «Прикладная математика и информатика» Самарского государственного технического университета);  
д-р техн. наук, проф. *А. И. Довгядло* (кафедра «Теплотехника и тепловые двигатели» Самарского государственного аэрокосмического университета)

Формат 60×90/16. Печ. л. 21. Зак. № АЛ-431.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-9710-4139-9

© ЛЕНАНД, 2016

18420 ID 222582



9 785971 041399

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: <a href="http://URSS.ru">http://URSS.ru</a>
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45
	URSS

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	5
<b>Глава 1.</b>	<b>Исследование теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий</b>	10
§ 1.1.	Неограниченная пластина	10
§ 1.2.	Бесконечный цилиндр	31
§ 1.3.	Аналитические решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений	42
§ 1.4.	Переменные во времени граничные условия первого рода	47
§ 1.5.	Переменные во времени граничные условия второго рода	53
§ 1.6.	Переменные во времени граничные условия третьего рода (температура среды – линейная функция времени)	58
§ 1.7.	Переменные во времени коэффициенты теплоотдачи	62
§ 1.8.	Несимметричные граничные условия первого рода	67
§ 1.9.	Переменное начальное условие	71
§ 1.10.	Пластина, цилиндр, шар (граничные условия третьего рода)	81
§ 1.11.	Задачи теплопроводности с внутренними источниками теплоты (граничные условия первого рода)	94
§ 1.12.	Внутренние источники теплоты при граничных условиях второго рода	104
§ 1.13.	Внутренние источники теплоты при граничных условиях третьего рода	112
§ 1.14.	Двумерные задачи теплопроводности с источником теплоты	113
§ 1.15.	Обобщенные функции в нестационарных задачах теплопроводности для многослойных конструкций	117
<b>Глава 2.</b>	<b>Нелинейные задачи теплопроводности</b>	132
§ 2.1.	Коэффициент температуропроводности – линейная функция температуры	132
§ 2.2.	Коэффициент температуропроводности – степенная функция температуры	140
§ 2.3.	Нелинейные задачи теплопроводности с внутренними источниками теплоты	142
§ 2.4.	Задачи теплопроводности с переменными физическими свойствами среды	143
§ 2.5.	Задачи теплопроводности с нелинейностью в уравнении и граничном условии	145
§ 2.6.	Задача Стефана с удалением расплавляемой среды	148
<b>Глава 3.</b>	<b>Аналитические решения гиперболических уравнений теплопроводности и движения</b>	161
§ 3.1.	Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности	161



§ 3.2.	Получение аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки при граничных условиях третьего рода.....	178
§ 3.3.	Гиперболические уравнения с релаксацией теплового потока и скалярной величины градиента температуры.....	184
§ 3.4.	Гиперболические уравнения с производными высокого порядка .....	196
§ 3.5.	Получение точных аналитических решений гиперболических уравнений движения при разгонном течении Куэтта .....	207
§ 3.6.	Аналитические решения гиперболических уравнений теплопроводности при симметричных граничных условиях первого рода .....	217
§ 3.7.	Распределение давлений по длине трубопровода в условиях гидравлического удара .....	228
§ 3.8.	Анализ распределения скоростей в условиях гидравлического удара .....	235
§ 3.9.	Математическое моделирование упругих продольных волн в жидкости с учетом её релаксационных свойств .....	237
§ 3.10.	Исследование распределения давления при гидравлическом ударе в трубопроводе с учетом релаксационных свойств вязкой жидкости.....	248
§ 3.11.	Разработка математических моделей затухающих колебаний упругих тел с учетом релаксационных свойств материалов ...	258
§ 3.12.	Получение точного аналитического решения гиперболического уравнения колебаний струны с учетом релаксационных свойств материалов .....	275
<b>Глава 4.</b>	<b>Аналитические методы решения задач термоупругости ....</b>	<b>287</b>
§ 4.1.	Бесконечный цилиндр с переменными физическими свойствами среды.....	287
§ 4.2.	Приближенные аналитические решения задач термоупругости для многослойных конструкций .....	290
§ 4.3.	Получение точного аналитического решения задачи термоупругости для многослойного полого цилиндра .....	296
§ 4.4.	Получение точного аналитического решения динамической задачи термоупругости на основе аналитического решения параболического уравнения теплопроводности .....	303
§ 4.5.	Точное аналитическое решение динамической задачи термоупругости на основе аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности .....	313
§ 4.6.	Динамическая термоупругость на основе решения гиперболического уравнения теплопроводности с релаксацией теплового потока и градиента температуры.....	322
	ЛИТЕРАТУРА.....	329