

С.М. Аполлонский

# **МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ**

**Методы математической физики  
и их использование при моделировании  
электромагнитных полей**

**Том 1**

С.М. Аполлонский

---

# МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ

Методы математической  
физики и их использование  
при моделировании  
электромагнитных полей

Том 1

Монография

RU  
**sci**ence  
RU-SCIENCE.COM

Москва  
2017

УДК 621.3  
ББК 31.2  
А76

**А76**      **Аполлонский, Станислав Михайлович.**  
Моделирование и расчет электромагнитных полей в технических устройствах. Методы математической физики и их использование при моделировании электромагнитных полей. Том 1 : монография / С.М. Аполлонский. — Москва : РУСАЙНС, 2017. — 342 с.

**ISBN 978-5-4365-1985-2**

Книга написана по материалам научных разработок и лекций автора по расчету и моделированию электромагнитных полей в технике, прочитанных в разных высших учебных заведениях.

*Книга предназначена для учащихся высших электротехнических учебных заведений по направлениям подготовки бакалавров, специалистов и магистров.*

*Представляет интерес для аспирантов, научных и инженерно-технических работников учебных и научно-исследовательских институтов.*

**УДК 621.3  
ББК 31.2**

**ISBN 978-5-4365-1985-2**

© Аполлонский С.М., 2017  
© ООО «РУСАЙНС», 2017

# Оглавление

Предисловие .....	8
Введение .....	10
Список принятых обозначений и сокращений .....	11
Часть I. Методы математической физики при исследовании ЭМП.....	12
Введение .....	12
<b>Глава 1. Математическое описание полей .....</b>	<b>14</b>
1.1. Характеристики физических полей .....	14
1.2. Скалярные поля .....	16
1.3. Векторные поля .....	19
1.4. Криволинейные координаты .....	21
1.5. Основные операторы, используемые при анализе поля .....	26
1.6. Основные теоремы, используемые при преобразовании векторов .....	33
1.6.1. Теорема Остроградского – Гаусса .....	33
1.6.2. Теорема Стокса .....	34
1.6.3. Теорема Грина .....	35
1.7. Типовые дифференциальные уравнения, описывающие поля .....	36
1.7.1. Дифференциальные уравнения 2-го порядка с двумя независимыми переменными .....	36
1.7.2. Дифференциальные уравнения 2-го порядка со многими независимыми переменными .....	45
1.7.3. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами .....	47
<b>Глава 2. Краевые задачи уравнений математической физики .....</b>	<b>50</b>
2.1. Постановка краевых задач математической физики .....	50
2.1.1. Основные понятия .....	50
2.1.2. Характеристики квазилинейных уравнений второго порядка .....	52
2.1.3. Классификация квазилинейных уравнений второго порядка .....	60
2.1.4. Граничные (краевые) и начальные условия .....	62
2.1.5. Единственность решения краевых задач .....	66
2.2. Виды граничных задач .....	67
2.2.1. Начальные задачи .....	67
2.2.2. Начально-краевые задачи .....	67
2.2.3. Краевые задачи .....	68
2.3. О корректности постановки задачи математической физики .....	69

2.4. Методы решения дифференциальных уравнений.....	70
2.4.1. Общие сведения.....	70
2.4.2. Метод разделения переменных.....	74
2.5. Теоремы сложения.....	75
2.6. Специальные функции, используемые при решении дифференциальных уравнений математической физики.....	78
<b>Глава 3. Дифференциальные уравнения гиперболического типа.....</b>	<b>79</b>
3.1. Простейшие задачи, моделируемые уравнениями гиперболического типа.....	79
3.2. Граничные и начальные условия.....	80
3.3. Редукция общей задачи.....	86
3.4. Постановка краевых задач для случая многих переменных.....	87
3.5. О единственности решения краевых задач, описываемых гиперболическими уравнениями.....	88
3.6. Метод разделения переменных при решении задач гиперболического типа.....	91
<b>Глава 4. Дифференциальные уравнения эллиптического типа.....</b>	<b>97</b>
4.1. Общий вид уравнения эллиптического типа.....	97
4.2. Основные граничные задачи.....	97
4.3. Простейшие задачи, моделируемые уравнениями Лапласа.....	100
4.3.1. Уравнение Лапласа.....	100
4.3.2. Стационарное тепловое поле.....	101
4.3.3. Потенциальное течение несжимаемой жидкости.....	102
4.3.4. Потенциал стационарного и электростатического поля.....	104
4.3.5. Потенциал магнитостатического поля.....	105
4.4. Решение задач, описываемых уравнениями Лапласа.....	105
4.4.1. Методы решения уравнения Лапласа.....	105
4.4.2. Решение уравнения Лапласа методом разделения переменных.....	107
4.4.3. Единственность решения граничных задач, описываемых уравнением Лапласа.....	111
4.5. Простейшие задачи, моделируемые уравнениями Гельмгольца.....	118
4.5.1. Задачи, приводящие к уравнению Гельмгольца.....	118
4.5.2. Связь уравнения Гельмгольца с уравнениями гиперболического и параболического типов.....	121
4.5.3. Постановка внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца.....	123
4.5.4. Постановка внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца.....	124
4.5.5. Методы решения уравнений Гельмгольца.....	129

<b>Часть II. Методы моделирования ЭМП.....</b>	<b>132</b>
<b>Глава 5. Математическая модель ЭМП.....</b>	<b>132</b>
5.1. Векторы ЭМП .....	132
5.2. Аналитическая связь между электрическими и магнитными явлениями .....	133
5.2.1. Законы полного тока и Фарадея.....	133
5.2.2. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.....	135
5.2.3. Теорема Гаусса и постулат Максвелла в дифференциальной форме.....	139
5.3. Принцип непрерывности магнитного потока и тока .....	142
5.4. Теоремы Остроградского и Стокса .....	142
5.5. Полная система уравнений Максвелла .....	143
5.6. Преобразование уравнений Максвелла .....	144
5.7. Потенциалы ЭМП .....	145
5.7.1. Векторный и скалярный потенциалы ЭМП .....	145
5.7.2. Электрический и магнитный потенциалы Герца.....	147
5.8. ЭМП в низкочастотном приближении.....	148
5.9. Уравнения математической физики, описывающие ЭМП.....	149
<b>Глава 6. Краевые задачи, возникающие при расчёте ЭМП.....</b>	<b>151</b>
6.1. Частные модели ЭМП .....	151
6.1.1. Модели статических ЭМП.....	151
6.1.2. МП стационарных токов.....	154
6.1.3. Модели квазистатических ЭМП.....	160
6.1.4. Модель нестационарных ЭМП.....	160
6.2. Граничные условия на поверхностях раздела различных сред .....	161
6.3. Приближённые граничные условия в ЭМП .....	175
6.4. Начальные условия и условия в бесконечности .....	177
6.5. О корректности постановки задачи по расчёту ЭМП.....	178
<b>Глава 7. Методы расчёта и моделирования статических и квазистатических ЭМП .....</b>	<b>179</b>
7.1. Метод разделения переменных .....	179
7.2. Метод конформных отображений .....	184
<b>Глава 8. Методы расчета переходных процессов в ЭМП .....</b>	<b>193</b>
8.1. О расчете переходных процессов в ЭМП.....	193
8.2. Установление магнитного потока в пластине .....	193
8.3. Установление тока в проводе круглого сечения .....	198
8.4. Экранирование импульсного МП круговой цилиндрической оболочкой .....	203

<b>Глава 9. Распространение ЭМП .....</b>	<b>213</b>
9.1. Уравнения Максвелла в символической форме записи .....	213
9.2. Уравнения Максвелла в проводящей среде.....	214
9.3. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде.....	215
9.4. Теорема Умова-Пойнтинга .....	218
9.4.1. Общие сведения об энергии ЭМП .....	218
9.4.2. Теорема Умова-Пойнтинга для мгновенных значений.....	220
9.4.3. Передача энергии от генератора к приёмнику по коаксиальному кабелю .....	222
9.5. Теорема Умова-Пойнтинга в комплексной форме .....	226
<b>Глава 10. Электромагнитные поля и волны.....</b>	<b>229</b>
10.1. Возникновение и особенности электромагнитных волн .....	229
10.2. Плоская ЭМВ. Бегущие ЭМВ .....	232
10.3. Монохроматическая плоская ЭМВ .....	236
10.4. Описание ЭМП с помощью стоячих волн .....	237
10.5. Энергия и импульс ЭМВ.....	239
10.6. Симметричные волны (сферическая и цилиндрическая). Оценочное рассмотрение .....	245
10.7. Излучение диполя (оценочное рассмотрение) .....	246
10.8. Излучение радиоволн .....	248
10.9. Распространение плоских радиоволн в полупроводящей среде.....	251
10.10. Направляющие системы.....	257
10.11. Распространение ЭМВ по коаксиальной линии.....	266
10.12. Распространение ЭМВ по волноводам .....	270
10.13. Электромагнитное поле в резонаторах .....	281
10.13.1. Общие сведения о резонаторах .....	281
10.13.2. Прямоугольный объёмный резонатор .....	284
10.13.3. Электромагнитные волны в резонаторах .....	286
10.14. Потери мощности в волноводе .....	289
10.14.1. Потери мощности .....	289
10.14.2. Определение коэффициента затухания .....	290
10.14.3. Добротность объёмного резонатора .....	292
<b>Глава 11. Энергия и механические проявления ЭМП .....</b>	<b>293</b>
11.1. Энергия и механические проявления МП в линейных средах .....	293
11.1.1. Энергия системы контуров с токами .....	293
11.1.2. Объёмная плотность энергии магнитного поля.....	296
11.1.3. Общий метод расчёта сил и моментов в системе контуров с токами .....	297
11.2. Энергия МП в нелинейных средах .....	300
11.2.1. Энергия индуктивной катушки с нелинейным магнитопроводом .....	300

11.2.2. Мощность потерь в магнитопроводе .....	303
11.3. Энергия и механические проявления ЭП в линейных средах .....	307
11.3.1. Энергия системы заряженных тел .....	307
11.3.2. Объёмная плотность энергии электрического поля .....	309
11.3.3. Общий метод расчёта сил в системе заряженных тел .....	310
<b>Глава 12. Специальные функции</b>	
<b>в уравнениях математической физики .....</b>	<b>314</b>
12.1. Функции Лежандра .....	314
12.1.1. Дифференциальное уравнение Лежандра .....	314
12.1.2. Функции Лежандра 1-го рода .....	315
12.1.3. Функции Лежандра 2-го рода .....	316
12.2. Цилиндрические функции .....	316
12.2.1. Уравнение цилиндрических функций .....	316
12.2.2. Функции Бесселя 1-го и 2-го рода .....	319
12.2.3. Различные типы цилиндрических функций .....	325
12.3. Обобщённые функции .....	330
12.3.1. Общие сведения .....	330
12.3.2. Дельта-функция Дирака .....	335
<b>Библиографический список .....</b>	<b>337</b>