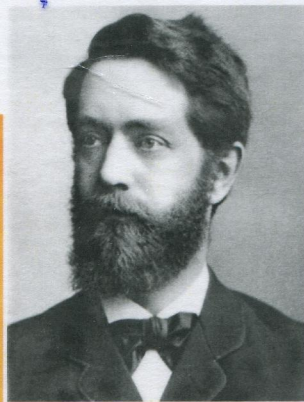


Физико •
Математическое
Наследие

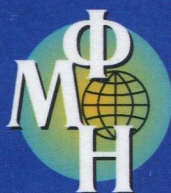
Ф. КЛЕЙН

Выдающийся
немецкий математик
Член-корреспондент
Прусской академии наук
в Берлине



НЕЕВКЛИДОВА
ГЕОМЕТРИЯ

Felix KLEIN • VORLESUNGEN ÜBER NICHT-EUKLIDISCHE GEOMETRIE



Математика
Геометрия



Физико-математическое наследие: математика (геометрия)

Felix Klein
VORLESUNGEN
ÜBER NICHT-EUKLIDISCHE GEOMETRIE

Ф. Клейн

**НЕЕВКЛИДОВА
ГЕОМЕТРИЯ**

Перевод с немецкого
Н. К. Брушлинского

Издание четвертое,
исправленное



URSS
МОСКВА

ББК 22.151я44 22.152


Клейн Феликс

Неевклидова геометрия: Пер. с нем. Изд. 4-е, испр. — М.: ЛЕНАНД, 2017. — 352 с. (Физико-математическое наследие: математика (геометрия).)

Вниманию читателя предлагается книга известного немецкого математика Ф. Клейна (1849–1925). В первой части подробно изложены основы проективной геометрии и теория проективных преобразований, необходимые для понимания дальнейших разделов книги. Далее показано, каким образом в проективную геометрию могут быть внесены понятия евклидовой геометрии; описываются соотношения, связывающие эллиптическую и гиперболическую геометрии с евклидовой геометрией; изучаются свойства неевклидовых геометрий. В третьей части описаны история и применения неевклидовой геометрии, ее отношение к другим областям математики.

Рекомендуется студентам университетов — будущим математикам, а также аспирантам и специалистам.

Формат 60×90/16. Печ. л. 22. Зак. № АЛ-522.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-9710-4251-8

© ЛЕНАНД, 2016

9158 ID 223789



9 785971 042518

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45
	URSS

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Содержание

Часть I

Введение в проективную геометрию	11
Глава 1. Основы проективной геометрии	12
§ 1. Аффинные, однородные и проективные координаты	12
1.1. Аффинные координаты	12
1.2. Однородные координаты	13
1.3. Проективные координаты	16
1.4. Связь между аффинными и проективными координатами	20
1.5. Обзор развития геометрии	20
§ 2. Соотношения связности проективных образов; односторонность проективной плоскости	23
§ 3. Линейные однородные подстановки	27
3.1. Линейные однородные подстановки; понятие группы	27
3.2. Когрессиентность и контрагессиентность	30
§ 4. Проективные преобразования	32
4.1. Проективные, свободно-аффинные и центрально-аффинные преобразования	32
4.2. Знак определителя подстановки	34
4.3. Наглядное изображение проективных преобразований	36
4.4. Неподвижные точки проективного преобразования	39
§ 5. n -мерные многообразия	42
§ 6. Проективные координаты прямой и проективные координаты плоскости; принцип двойственности	45
6.1. Проективные координаты прямой на плоскости	45
6.2. Проективные координаты плоскости	47
6.3. Двойственность на плоскости	48
6.4. Двойственность в пространстве	50
6.5. Двойственное в себе построение проективной геометрии	51
§ 7. Двойные отношения	52
7.1. Элементарные свойства	52

7.2.	Двойное отношение четырех точек на прямой	53
7.3.	Двойное отношение в пучке прямых и плоскостей	55
7.4.	Определение проективных координат с помощью двойных отношений	57
§ 8.	Мнимые элементы	57
8.1.	Введение мнимых точек	58
8.2.	Мнимые элементы на плоскости	59
8.3.	Мнимые элементы в пространстве	60
8.4.	Наглядное изображение мнимых точек прямой линии на числовой плоскости и на числовой сфере	61
8.5.	Антиколлинеации	63
8.6.	Исторические замечания	64
Глава 2.	Образы второй степени	65
§ 1.	Полярные преобразования относительно образов второго порядка и класса	65
1.1.	Определение образов второго порядка и класса	65
1.2.	Полярное преобразование относительно данного образа второго порядка	66
1.3.	Полярные преобразования относительно образов второго класса	68
1.4.	Основные теоремы о полярных преобразованиях	70
§ 2.	Соответствие между невырождающимися образами второго порядка и второго класса	72
§ 3.	Классификация образов второго порядка	75
3.1.	Классификация поверхностей второго порядка по рангам их определителей	75
3.2.	Отнесение поверхности второго порядка к полярному тетраэдру	77
3.3.	Дальнейшая классификация действительных поверхностей второго порядка	80
3.4.	Соответствующая классификация кривых и систем точек второго порядка	84
3.5.	Исторические замечания о классификации образов второго порядка	85
§ 4.	Классификация образов второго класса; связь с классификацией образов второго порядка	85
4.1.	Классификация поверхностей второго класса	85
4.2.	Соотношения между различными типами поверхностей второго порядка и класса	87
4.3.	Соответствующие исследования для случая плоскости	89
§ 5.	Прямые линии на невырождающихся поверхностях второго порядка	90

§ 6. Превращения образов второй степени при непрерывном изменении коэффициентов; классификация этих образов	95
6.1. Превращения на прямой линии	96
6.2. Превращения на плоскости	96
6.3. Соединение понятий кривых второго порядка и класса в понятие кривой второй степени	100
6.4. Превращения в пространстве	103
6.5. Объединение понятий поверхности второго порядка и класса в понятие поверхности второй степени	107
Глава 3. Проективные преобразования, переводящие образ второй степени самого в себя	109
§ 1. Одномерный случай	109
1.1. Комплексные проективные преобразования, переводящие невырождающийся образ самого в себя	109
1.2. Действительные проективные преобразования	111
1.3. Проективные преобразования, переводящие дважды взятую точку самое в себя	112
1.4. Непрерывное превращение различных случаев друг в друга	113
§ 2. Двумерный случай	114
2.1. Комплексные проективные преобразования, переводящие невырождающийся образ сам в себя	114
2.2. Действительные проективные преобразования	117
2.3. Инвариантные элементы	120
2.4. Проективные преобразования как вращения	123
2.5. Проективные преобразования, переводящие данный вырождающийся образ в себя	125
2.6. Превращение различных случаев друг в друга	127
§ 3. Трехмерный случай	128
3.1. Комплексные проективные преобразования, переводящие невырождающийся образ сам в себя; сдвиги	128
3.2. Действительные проективные преобразования	133
3.3. Инвариантные элементы	135
3.4. Вращения и винтообразные движения	138
3.5. Проективные преобразования, оставляющие инвариантным вырождающийся образ	142
3.6. Превращение различных случаев друг в друга	143

Часть II

Проективное мероопределение	147
Глава 4. Внесение евклидовой метрики в проективную систему	148
§ 1. Основные метрические формулы евклидовой геометрии	148
1.1. Формулы расстояния	148
1.2. Формулы угла	149
§ 2. Исследование метрических формул; круговые точки и шаровой круг	151
2.1. Рассмотрение формул расстояния	151
2.2. Исследование формул углов	153
2.3. Круговые точки и шаровой круг	156
§ 3. Евклидова метрика как проективное отношение к фундаментальным образам	157
3.1. Выражение евклидова угла с помощью двойного отношения	157
3.2. Соответствующее преобразование формулы евклидова расстояния	159
§ 4. Замена круговых точек и шарового круга действительными образами	161
§ 5. Метрика в связке прямых и в связке плоскостей; сферическая и эллиптическая геометрии	165
5.1. Метрика в связке	165
5.2. Связь с геометрией на сфере	166
5.3. Эллиптическая геометрия	168
5.4. Связь между эллиптической и сферической геометриями	171
Глава 5. Введение проективных координат, независимое от евклидовой геометрии	174
§ 1. Построение четвертых гармонических элементов	175
§ 2. Введение координат в одномерной области	178
§ 3. Введение координат на плоскости и в пространстве	182
Глава 6. Проективные мероопределения	184
§ 1. Невырождающиеся мероопределения	184
1.1. Определение расстояний и углов с помощью двойных отношений	185
1.2. Аналитические выражения расстояний и углов	187
1.3. Эллиптическое и гиперболическое мероопределения на прямой линии	191
1.4. Эллиптическое и гиперболическое мероопределения в пучке прямых и плоскостей	194
1.5. Эллиптическое и гиперболическое мероопределения на плоскости	194

1.6. Эллиптическое и гиперболическое мероопределения в пространстве	198
§ 2. Вырождающиеся мероопределения	199
2.1. Прямая линия	199
2.2. Пучок прямых и плоскостей	200
2.3. Плоскость	201
2.4. Пространство; заключительные замечания	204
§ 3. Двойственность	204
§ 4. Твердые преобразования	206
4.1. Твердые преобразования и преобразования подобия	206
4.2. Движения и зеркальные отображения	207
4.3. Порождение движений с помощью специальных преобразований	208
Глава 7. Соотношения между эллиптической, евклидовой и гиперболической геометриями	209
§ 1. Особое положение трех геометрий	209
§ 2. Превращение эллиптической геометрии в евклидову и далее в гиперболическую геометрию	210
§ 3. Истолкование эллиптической и гиперболической геометрий как геометрий на евклидовой сфере действительного и мнимого радиусов	212
§ 4. Вывод формул эллиптической и гиперболической геометрий из формул геометрии на евклидовой сфере	214
4.1. Тригонометрические формулы	215
4.2. Предельный переход к евклидовой геометрии	218
4.3. Формулы длины окружности и площади круга	218
§ 5. Сумма углов треугольника и его площадь	220
5.1. Эллиптическая геометрия	220
5.2. Гиперболическая геометрия	221
5.3. Евклидова геометрия	223
5.4. Обобщение на случай высших размерностей	223
§ 6. Евклидова и обе неевклидовы геометрии как системы мероопределений, применимых к окружающему миру	225
Глава 8. Специальное исследование обеих неевклидовых геометрий	231
§ 1. Эллиптическая и гиперболическая геометрии на прямой линии	231
1.1. Эллиптическая прямая	231
1.2. Гиперболическая прямая	233
§ 2. Эллиптическая геометрия плоскости	234
2.1. Общие замечания; двойственность	234
2.2. Движения	234
2.3. Некоторые предложения из теории кругов	236

2.4.	Теоремы о конгруэнтности	237
2.5.	Теоремы о точках пересечения в треугольнике	238
2.6.	Заключительные замечания	241
§ 3.	Гиперболическая геометрия плоскости	241
3.1.	Общие замечания; параллельные линии	241
3.2.	О перпендикулярных прямых	243
3.3.	Зеркальные отображения	244
3.4.	Движения; их классификация по неподвижным элементам; окружности	245
3.5.	Заключительные замечания	247
§ 4.	Теория кривых второй степени в плоской неевклидовой геометрии	248
§ 5.	Эллиптическая геометрия пространства	254
5.1.	Общие замечания	254
5.2.	Клиффордовы параллели и сдвиги	255
5.3.	Произвольные движения, в частности вращения	258
5.4.	Гамильтоновы кватернионы и группа эллиптических движений пространства	260
§ 6.	Клиффордовы поверхности	262
6.1.	Их простейшие свойства	262
6.2.	Дифференциальная геометрия клиффордовой поверхности	265
6.3.	Геометрия на всей (im Grossen) клиффордовой поверхности	269
§ 7.	Гиперболическая геометрия пространства	271
7.1.	Общие замечания	271
7.2.	Движения	271
7.3.	Шаровые поверхности	273
7.4.	Об аналитическом изображении движений	275
Глава 9.	Проблема пространственных форм	276
§ 1.	Пространственные формы плоской евклидовой геометрии	276
1.1.	Постановка задачи; геометрия цилиндра и конуса	276
1.2.	Пространственная форма клиффордовой поверхности	279
1.3.	Связь с теорией групп	279
1.4.	Установление всех евклидовых пространственных форм	280
1.5.	Связь между соответствующими друг другу одно- и двусторонними пространственными формами	285
§ 2.	Пространственные формы плоских эллиптической и гиперболической геометрий	286

2.1. Эллиптические пространственные формы	287
2.2. Гиперболические пространственные формы	287
§ 3. Пространственные формы трехмерных геометрий	292

Часть III

Отношения неевклидовой геометрии к другим областям 295

Глава 10. История неевклидовой геометрии; отношения к аксиоматике и к дифференциальной геометрии 296

§ 1. Начала Евклида и попытки доказательства аксиомы о параллельных	296
§ 2. Аксиоматическое обоснование гиперболической геометрии	299
§ 3. Основы теории поверхностей	302
§ 4. Связь плоской неевклидовой геометрии с теорией поверхностей	306
§ 5. Расширение дифференциально-геометрической точки зрения, произведенное Риманом	313
§ 6. Конформные отображения неевклидовой плоскости	318
6.1. Конформное отображение эллиптической и гиперболической плоскостей на сферу	318
6.2. Конформное отображение эллиптической и гиперболической плоскостей на евклидову плоскость	321
6.3. Конформные отображения гиперболической геометрии на гауссову числовую плоскость	324
§ 7. Внедрение проективной геометрии	329
§ 8. Дальнейшее построение неевклидовой геометрии, в частности дифференциальной геометрии	329

Глава 11. Обзор применений неевклидовой геометрии 332

§ 1. Гиперболические движения пространства и плоскости и линейные подстановки комплексного переменного	332
§ 2. О применениях пространственной гиперболической геометрии к теории линейных подстановок	335
§ 3. Автоморфные функции, униформизация и неевклидово мероопределение	337
§ 4. Замечания о применении неевклидова мероопределения в топологии	342
§ 5. Приложения проективного мероопределения в специальной теории относительности	343

Предметный указатель 347