

Г. Л. БРОВКО

---

# ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Развитие  
математического аппарата  
и основ общей теории

---

НАУКА

Г. Л. БРОВКО

---

# ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Развитие  
математического аппарата  
и основ общей теории



МОСКВА НАУКА 2017

УДК 51.517  
ББК 22.25  
Б88

Рецензенты:

доктор физико-математических наук *А.А. Маркин*,  
доктор физико-математических наук *П.В. Трусов*

**Бровко Г. Л.**

Определяющие соотношения механики сплошной среды : Развитие математического аппарата и основ общей теории / Г.Л. Бровко. — М. : Наука, 2017. — 432 с. — ISBN 978-5-02-040054-2 (в пер.).

Книга посвящена развитию математических основ и аппарата общей теории определяющих соотношений классической механики сплошных сред при произвольных деформациях. В ней обобщены достижения современных отечественных и зарубежных исследований и предложены оригинальные результаты по тензорному представлению механических характеристик, выяснению общей математической структуры их связей в определяющих соотношениях, по развитию аксиоматики и основ теории. Разработан математический аппарат объективных тензоров и связывающих их независимых от системы отсчета отображений и уравнений; введено обобщение объективных производных. Построены новые классы тензорных мер напряжений и конечных деформаций, включающие известные меры. Предложен вариант теории определяющих соотношений, согласованный с подходами Ильюшина и Нолла, аксиоматически учитывающий возможное наличие в теле внутренних кинематических связей и полей внутренних массовых сил. Дано обобщение понятий образа процесса и свойств пятимерной изотропии на область конечных деформаций.

Для научных работников и инженеров, студентов и аспирантов университетов и технических вузов по специальности «механика», преподавателей.

ISBN 978-5-02-040054-2

© Бровко Г.Л., 2017  
© ФГУП Издательство «Наука»,  
редакционно-издательское  
оформление, 2017

# Оглавление

|                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Предисловие</b> .....                                                                                | 3  |
| <b>Введение</b> .....                                                                                   | 5  |
| §1. Становление теории определяющих соотношений .....                                                   | 5  |
| §2. Актуальные проблемы теории .....                                                                    | 10 |
| 2.1. Тензорные характеристики<br>механических процессов .....                                           | 10 |
| 2.2. Общая математическая структура отображений<br>в определяющих соотношениях .....                    | 17 |
| 2.3. Вопросы аксиоматики. Общие приведенные<br>формы определяющих соотношений .....                     | 22 |
| 2.4. Подходы к классификации моделей.<br>Постулат изотропии .....                                       | 26 |
| §3. Комментарий к изложению материала .....                                                             | 32 |
| <br><b>Часть I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ</b> .....                                                                 | 41 |
| <br><b>Глава 1. ОБЪЕКТИВНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ<br/>          ТЕНЗОРНЫЕ ПРОЦЕССЫ</b> .....                     | 43 |
| §1.1. Механические тензорные процессы<br>в деформирующихся телах<br>в различных способах описания ..... | 43 |
| 1.1.1. Движение среды. Способы описания .....                                                           | 44 |
| 1.1.2. Деформации материальных частиц .....                                                             | 46 |

|                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.1.3. Замена отсчетной конфигурации.<br>Деформации в относительном описании.<br>Наложение деформаций ..... | 60  |
| 1.1.4. Скорости деформаций. Спин .....                                                                      | 64  |
| 1.1.5. Напряженное состояние среды .....                                                                    | 68  |
| 1.1.6. Другие механические характеристики.<br>Общие уравнения баланса .....                                 | 74  |
| 1.1.7. Механические тензорные процессы. Физические<br>тождества и физическая эквивалентность .....          | 79  |
| §1.2. Замена системы отсчета и преобразование<br>механических тензорных характеристик .....                 | 81  |
| §1.3. Объективные тензоры. Типы объективности.<br>Переплетающие операторы и диаграммы .....                 | 89  |
| §1.4. Объективные тензорные процессы.<br>Истории, предыстории .....                                         | 100 |

## **Глава 2. ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЪЕКТИВНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПРОЦЕССОВ .....**

109

|                                                                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| §2.1. Отображения и уравнения связи объективных<br>тензорных процессов. Независимость отображений<br>и уравнений от системы отсчета .....                 | 112 |
| §2.2. Критериальные свойства и общие представления<br>независимых от системы отсчета отображений и<br>уравнений связи объективных тензорных процессов ... | 117 |
| §2.3. Примеры независимых от системы отсчета<br>отображений и уравнений .....                                                                             | 123 |
| §2.4. Переплетения отображений. Отображения диаграмм ..                                                                                                   | 132 |
| §2.5. Объективные производные и дифференциальные<br>операторы. Объективное интегрирование .....                                                           | 139 |
| 2.5.1. Объективные производные .....                                                                                                                      | 139 |
| 2.5.2. Дифференциальные операторы по времени,<br>не зависящие от системы отсчета .....                                                                    | 142 |
| 2.5.3. Объективное интегрирование .....                                                                                                                   | 144 |

## **Глава 3. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ТЕНЗОРНЫХ МЕР ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ ....**

146

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| §3.1. Основные положения теории ..... | 146 |
|---------------------------------------|-----|

|                                                                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| §3.2. Общие подходы к построению тензорных мер деформаций и напряжений.<br>Теорема об энергетической сопряженности ..... | 149 |
| 3.2.1. Общий лагранжев класс тензорных мер деформаций и напряжений .....                                                 | 150 |
| 3.2.2. Теорема об энергетической сопряженности.<br>Полный лагранжев класс тензорных мер.....                             | 154 |
| §3.3. Простой лагранжев класс тензорных мер деформаций и напряжений.<br>Объективные аналоги и сопряженные диаграммы..... | 158 |
| §3.4. Семейство голономных изотропных мер простого лагранжева класса.....                                                | 168 |
| §3.5. Семейство простых лагранжевых коротационных мер..                                                                  | 175 |
| §3.6. Сравнительные характеристики тензорных мер простого лагранжева класса .....                                        | 178 |
| 3.6.1. Сравнительные характеристики голономных лагранжевых мер .....                                                     | 178 |
| 3.6.2. Сравнение коротационных мер .....                                                                                 | 180 |
| §3.7. Некоторые общие замечания о введенных множествах мер .....                                                         | 186 |

## **Глава 4. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ.....**

|                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| §4.1. Сопротивление деформированию: основные понятия и принципы общей теории .....                                 | 189 |
| 4.1.1. Законы баланса для произвольных движений.<br>Замечания о массовых силах .....                               | 190 |
| 4.1.2. Динамические процессы. Понятие свойств и определяющих соотношений<br>сопротивления тел деформированию ..... | 197 |
| 4.1.3. Основные аксиомы (принципы) общей теории определяющих соотношений сопротивления деформированию .....        | 204 |
| §4.2. Общие приведенные формы определяющих соотношений .....                                                       | 208 |
| 4.2.1. Внутренние кинематические связи .....                                                                       | 208 |
| 4.2.2. Произвольные поля внутренних силовых взаимодействий .....                                                   | 216 |

|        |                                                                                                                                              |     |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.2.3. | Оператор напряжений: главное представление.<br>Локализованность напряжений и слабая<br>локализованность кинематических связей .....          | 220 |
| 4.2.4. | Общая приведенная форма<br>оператора напряжений .....                                                                                        | 228 |
| 4.2.5. | Общая приведенная форма оператора<br>внутренних массовых сил .....                                                                           | 236 |
| 4.2.6. | Сводный результат .....                                                                                                                      | 239 |
| §4.3.  | Эквивалентные представления<br>определяющих соотношений .....                                                                                | 242 |
| 4.3.1. | Общие приведенные формы определяющих<br>соотношений для различных динамических<br>процессов .....                                            | 242 |
| 4.3.2. | Простые тела. Эквивалентность определяющих<br>соотношений Нолла и Ильюшина .....                                                             | 244 |
| 4.3.3. | Множества эквивалентных представлений<br>оператора напряжений для простых тел.<br>Определяющие соотношения<br>как отображения диаграмм ..... | 245 |
| 4.3.4. | Выводы .....                                                                                                                                 | 252 |

## **Глава 5. ПОНЯТИЯ ОБРАЗА ПРОЦЕССА И ПЯТИМЕРНОЙ ИЗОТРОПИИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ .. 254**

|        |                                                                                                             |     |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| §5.1.  | Изотропия по Ильюшину (пятимерная изотропия).<br>Варианты образа процесса<br>при конечных деформациях ..... | 255 |
| 5.1.1. | Общая схема построения образа процесса<br>(материальная и пространственная версии) .....                    | 257 |
| 5.1.2. | Варианты образа процесса и свойств<br>пятимерной изотропии при конечных<br>деформациях .....                | 262 |
| §5.2.  | Сравнение вариантов образа процесса.<br>Оценки для умеренно больших деформаций .....                        | 264 |
| 5.2.1. | Замечания о простейшем лагранжевом<br>голономном варианте .....                                             | 266 |
| 5.2.2. | Коротационные варианты .....                                                                                | 268 |
| 5.2.3. | Логарифмические варианты. Оценки<br>для умеренно больших деформаций .....                                   | 271 |
| 5.2.4. | Выводы .....                                                                                                | 275 |

## Часть II. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ..... 277

### Глава А. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБЪЕКТИВНОСТИ ТЕНЗОРНЫХ ПРОЦЕССОВ И СВЯЗЕЙ МЕЖДУ НИМИ ..... 279

- §А.1. Объективные тензоры различных рангов.
  - Переплетения и диаграммы ..... 280
  - А.1.1. Тензоры на евклидовом векторном пространстве ..... 280
  - А.1.2. Объективные тензоры ..... 287
  - А.1.3. Алгебра объективных тензоров ..... 292
  - А.1.4. Представление группы замен системы отсчета в объективных тензорах.
    - Переплетающие операторы ..... 293
  - А.1.5. Категории и диаграммы объективных тензоров ..... 297
- §А.2. Действие группы замен системы отсчета на  $\mathcal{L}_{k,m}$  ..... 303
  - А.2.1. Действие на полиадных представлениях ..... 304
  - А.2.2. Действие на тензорах специального вида ..... 306
  - А.2.3. Материальные и пространственные блоки объективных тензоров ..... 307
  - А.2.4. Многообразия Штифеля и Грассмана ..... 310
  - А.2.5. Правильные свертки ..... 312
  - А.2.6. Иерархия типов объективности ..... 313
- §А.3. Изотропные отображения и изотропные уравнения связи тензоров и тензорных процессов ..... 315
  - А.3.1. Изотропные тензорные функции ..... 315
  - А.3.2. Изотропные тензорные уравнения ..... 318
  - А.3.3. Изотропные отображения тензорных процессов ..... 319

### Глава Б. ЗАМЕЧАНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВАМ ТЕОРЕМ ..... 324

- §Б.1. К доказательству Теорем 2.1, 2.2 ..... 324
- §Б.2. Доказательства теорем Главы 3 ..... 329

|                                                                                                                                                       |                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <b>Глава В. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ<br/>О МАССОВЫХ СИЛАХ.....</b>                                                                                    | <b>338</b>     |
| §В.1. Структура массовых силовых взаимодействий .....                                                                                                 | 338            |
| §В.2. Потенциальные поля внутренних массовых<br>взаимодействий центрального типа .....                                                                | 341            |
| §В.3. Степень произвола возможной реализации<br>полей напряжений и внутренних массовых сил<br>при наличии кинематических связей .....                 | 343            |
| <br><b>Глава Г. ПРОСТЫЕ СРЕДЫ<br/>И ГИПОТЕЗА МАКРОФИЗИЧЕСКОЙ<br/>ОПРЕДЕЛИМОСТИ.<br/>ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ<br/>ЭКСПЕРИМЕНТЫ.<br/>КОНЕЧНАЯ ПРЕДЫСТОРИЯ .....</b> | <br><b>347</b> |
| §Г.1. Некоторые общие классы определяющих соотношений<br>простых тел и сред .....                                                                     | 347            |
| §Г.2. Экспериментальная воспроизводимость реакций тел.<br>Основы теории и практики<br>определяющих экспериментов .....                                | 352            |
| §Г.3. Тела с конечной предысторией. Старение .....                                                                                                    | 355            |
| <br><b>Глава Д. ПРИМЕРЫ ВАРИАНТОВ<br/>ОБРАЗА ПРОЦЕССА<br/>ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ..</b>                                                              | <br><b>361</b> |
| §Д.1. Простой сдвиг и варианты траекторий<br>конечной деформации .....                                                                                | 361            |
| §Д.2. Модель гипотупругости. «Аномалия» колебаний<br>напряжений.....                                                                                  | 364            |
| §Д.3. Соотношения пластичности малой кривизны.<br>Дополнительные замечания .....                                                                      | 370            |
| <b>Заключение .....</b>                                                                                                                               | <b>374</b>     |
| <b>Литература.....</b>                                                                                                                                | <b>379</b>     |
| <b>Предметный указатель.....</b>                                                                                                                      | <b>413</b>     |