

Б А К А Л А В Р И А Т

# ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Е. А. Павлов

[www.e.lanbook.com](http://www.e.lanbook.com)



**ЭБС  
ЛАНЬ**



Е. А. ПАВЛОВ

# ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

*Учебное пособие*  
Издание второе, исправленное



•САНКТ-ПЕТЕРБУРГ•  
•МОСКВА•КРАСНОДАР•  
•2023•

УДК 517  
ББК 22.162я73

**П 12 Павлов Е. А.** Основы функционального анализа: учебное пособие / Е. А. Павлов. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург: Лань, 2023. — 88 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература). — Текст: непосредственный.

**ISBN 978-5-8114-3635-4**

В данном пособии даны необходимые определения, обозначения и некоторые факты, которые были использованы для изложения основного материала. Пособие содержит основополагающие факты (основные принципы) функционального анализа. Приведено большое количество примеров и упражнений для самостоятельного решения. Пособие предназначено для студентов старших курсов специальности «Математика». Оно может быть полезно студентам-физикам и студентам некоторых технических специальностей.

УДК 517  
ББК 22.162я73

**Рецензенты:**

*М. А. МУРАТОВ* — доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского;

*О. И. РУДНИЦКИЙ* — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и геометрии Таврической академии Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского.

**Обложка**

*Е. А. ВЛАСОВА*

© Издательство «Лань», 2023  
© Е. А. Павлов, 2023  
© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	5
Глава 1. Конечномерные линейные пространства .....	6
1.1. $n$ -мерные векторные пространства .....	6
1.2. Норма вектора .....	7
1.3. Базис. Разложение по базису .....	8
1.4. Элементы теории множеств .....	10
Глава 2. Бесконечномерные линейные пространства .....	15
2.1. Элементы теории меры .....	15
2.2. Пространства последовательностей .....	21
2.3. Метрические пространства .....	22
2.4. Нормированные пространства .....	24
2.5. Банаховы пространства .....	25
2.6. Гильбертово пространство .....	26
2.7. Лебеговы пространства .....	28
Глава 3. Основы теории операторов в банаховых пространствах .....	31
3.1. Линейные операторы в конечномерных пространствах .....	31
3.2. Линейные операторы в пространствах последовательностей .....	34
3.3. Линейные операторы в лебеговых пространствах .....	36
3.4. Непрерывность и ограниченность линейных операторов в банаховых пространствах .....	37
3.5. Компактность множеств. Вполне непрерывные операторы .....	40
3.6. Примеры классических линейных операторов, играющих важную роль в приложении .....	40
3.7. Замкнутые операторы .....	42
3.8. Обратный оператор .....	43

Глава 4. Линейные функционалы .....	44
4.1. Линейные функционалы в конечномерных пространствах....	44
4.2. Линейные функционалы в бесконечномерных пространствах .....	45
4.3. Линейные функционалы в лебеговых пространствах .....	46
4.4. Линейные функционалы в банаховых пространствах. Теорема Хана – Банаха .....	47
4.5. Сопряженное пространство .....	48
4.6. Виды сходимостей в нормированных (банаховых) пространствах и связь между ними .....	52
4.7. Элементы спектральной теории операторов.....	55
Глава 5. Интегральные операторы .....	59
5.1. Основные свойства интегральных операторов .....	60
5.2. Интегральные операторы в пространстве суммируемых функций .....	61
5.3. Интегральные операторы свертки .....	64
5.4. Интегральные операторы типа свертки .....	65
Глава 6. Некоторые классические интегральные операторы .....	67
6.1. Оператор Харди – Литтльвуда .....	67
6.2. Обобщенный оператор Харди – Литтльвуда .....	67
6.3. Оператор Стеклова .....	68
6.4. Оператор Кальдерона .....	69
6.5. Оператор Фредгольма .....	69
6.6. Интегральный оператор Урысона .....	69
Задачи и упражнения .....	72
Глава 7. Элементы теории интерполяции линейных операторов .....	75
Глава 8. Краткая история возникновения и развития функционального анализа .....	77
Лауреаты Филдсовской премии .....	84
Литература.....	86