

Физико-
Математическое
Наследие

ОСНОВЫ **В. Ф. КАГАН**
ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ
В ТЕНЗОРНОМ
ИЗЛОЖЕНИИ **2**

- Поверхности в пространстве
- Отображения и изгибания поверхностей
- Специальные вопросы



Математика

Дифференциальная геометрия



В. Ф. Каган

**ОСНОВЫ
ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ
В ТЕНЗОРНОМ ИЗЛОЖЕНИИ**

Часть вторая

Поверхности в пространстве

•

**Отображения и изгибания
поверхностей**

•

Специальные вопросы

Издание второе



URSS

МОСКВА

Каган Вениамин Федорович

Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 2: Поверхности в пространстве. Отображения и изгибания поверхностей. Специальные вопросы. Изд. 2-е. — М.: ЛЕНАНД, 2021. — 408 с. (Физико-математическое наследие: математика (дифференциальная геометрия).)

Вниманию читателей предлагается классический фундаментальный труд выдающегося математика, основателя тензорной дифференциально-геометрической школы в СССР В. Ф. Кагана (1869–1953). В книге дается наиболее существенный материал дифференциальной геометрии поверхностей в современном автору построении, делается обстоятельное и в то же время доступное изложение тензорного аппарата в его применении к дифференциальной геометрии, а также излагаются результаты и достижения в этой области геометров Московского государственного университета.

Издание состоит из двух частей. В настоящей второй части содержатся геометрия в пространстве, отображение поверхностей (конформное, сферическое, геодезическое), учение об изгибании поверхностей, учение о сетях на поверхности и другие вопросы. Первая часть, где изложены учение о линейных вектор-функциях, основы теории кривых в пространстве, тензорная алгебра и основанные на ней общие основания теории поверхностей, а также рассмотрены важнейшие типы поверхностей, начала тензорного анализа и внутренняя геометрия поверхностей, выходит одновременно со второй в нашем издательстве.

Книга рекомендуется математикам и физикам, преподавателям, аспирантам и студентам физико-математических факультетов высших учебных заведений.

При редакционном участии Г. Б. Гуревича

ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.

Формат 70×100/16. Печ. л. 25,5. Зак. № 165615.

Отпечатано в АО «Т 8 Издательские Технологии».

109316, Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5.

ISBN 978-5-9710-8104-3

© ЛЕНАНД, 2021

29260 ID 265925



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

- § 52. Основная теорема теории поверхностей 9
1. Определение дифференциальной формы по выведенным из неё христоффелям (9). 2. Основная теорема теории поверхностей (10). 3. Иммерсия двух квадратичных форм (13). 4. Теорема Бонне (15). 5. Случай поверхности, развёртывающейся на плоскость (16). 6. Христоффели, определяющие метрическую форму поверхности (18). 7. Характеристический признак поверхностей вращения (20).
- § 53. Кривизна линий, расположенных на поверхности 23
1. Высота и азимут кривой в данной точке поверхности (23). 2. Точки распрямления кривой на поверхности (24). 3. Формула Менье (25). 4. Определение кривизны кривой на поверхности по заданной её ориентации (27). 5. Теорема Менье (28). 6. Индиатриса Дюпена (30). 7. Другая интерпретация индиатрисы Дюпена (32).
- § 54. Развитие учения об асимптотических линиях и линиях кривизны поверхности 34
1. Вводные соображения (34). 2. Пространственная и геодезическая кривизны асимптотической линии (34). 3. Кручение асимптотической линии (35). 4. Завершение того же вывода (36). 5. Нормальная кривизна поверхности в асимптотическом направлении (37). 6. Линии кривизны поверхности и их дифференциальные уравнения (38). 7. Геометрический признак линий кривизны (39). 8. Плоские линии кривизны (39). 9. Теорема Иоахимстала (40). 10. Теорема Дюпена (42). 11. Линии кривизны центральной поверхности 2-го порядка (42). 12. Геодезическое кручение линий кривизны (43). 13. Линии кривизны прямого геликоида (44).
- § 55. Тензор Кодацци и связанная с ним кубическая инвариантная форма 45
1. Тензор Кодацци (45). 2. Тензор Кодацци на развёртывающейся поверхности (45). 3. Выражение производных гауссовой и средней кривизин поверхности через кодацциев тензор (46). 4. Дифференциальная форма и инвариант, порождаемые кодацциевым тензором (47). 5. Уравнения Форсайта (48). 6. Предложения, вытекающие из уравнений Форсайта (50). 7. Поверхности, на которых как гауссова, так и средняя кривизны сохраняют постоянные значения вдоль каждой линии кривизны одного семейства (51). 8. Разыскание всех поверхностей, на которых основные формы имеют установленный вид (53). 9. Другое выражение тензора Кодацци (56).
- § 56. Трижды ортогональные системы поверхностей 57
1. Построение трижды ортогональной системы поверхностей (57). 2. Функции Ламе (58). 3. Девивационные формулы Гаусса в пространстве E_3 (59). 4. Уравнения иммерсии формы Ламе (60). 5. Разыскание функций Ламе, определяющих трижды ортогональную систему поверхностей (61). 6. Проблема Кэли (62). 7. Вспомогательное предложение (64). 8. Решение задачи Кэли (65). 9. Дифференциальное уравнение Кэли-Дарбу (67). 10. Автоморфизмы трижды ортогональных систем поверхностей (70).

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

- § 57. Проективные поверхности 71
1. Определение проективных поверхностей (71). 2. Компоненты параллельного перенесения на проективной поверхности (72). 3. Разыснение метрического тензора проективной поверхности (74). 4. Дискриминант метрического тензора проективной поверхности (75). 5. Бельтрамиева карта и абсолют проективной поверхности (76).
- § 58. Метрические соотношения на поверхностях постоянной кривизны 78
1. Основная метрическая форма поверхности постоянной кривизны в полярных координатах (78). 2. Теорема синусов на поверхностях постоянной кривизны (80). 3. Полная система тригонометрических уравнений (81). 4. Тригонометрические уравнения прямоугольного треугольника (83). 5. Вычисление площади геодезического треугольника (84). 6. Декартовы координаты на псевдосферической поверхности (85). 7. Уравнение геодезической линии на псевдосферической поверхности и бельтрамиевы координаты на ней (86). 8. Выражение метрической формы псевдосферической поверхности в декартовых и бельтрамиевых координатах (88). 9. Отображение псевдосферической поверхности на бельтрамиевом круге (90). 10. Выражение расстояния двух точек на поверхности постоянной кривизны в бельтрамиевых координатах (91). 11. Угол между двумя направлениями на поверхности постоянной кривизны. Угол параллельности на псевдосферической поверхности (92). 12. Движения на поверхностях постоянной кривизны (93).
- § 59. Поверхности вращения постоянной кривизны. Псевдосфера 96
1. Дифференциальное уравнение поверхностей вращения постоянной кривизны и его первый интеграл (96). 2. Поверхности вращения постоянной положительной кривизны (97). 3. Поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны (100). 4. Псевдосфера (102). 5. Изотермические координаты на псевдосфере (104). 6. Геодезические линии псевдосферы (105). 7. Параллельное перенесение вектора на псевдосфере (107). 8. Асимптотические линии псевдосферы (108). 9. Поверхности постоянной средней кривизны (109).
- § 60. Теорема Гильберта 111
1. Задача Гильберта (111). 2. Асимптотические координаты (111). 3. Формула Хацидакиса (113). 4. Теорема Гильберта (114).

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

ОТОВАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

- § 61. Начала общей теории отображения поверхностей 117
1. Общие свойства отображения (117). 2. Эллипс искажения (118). 3. Главные направления отображения в каждой точке отображаемой поверхности (120). 4. Афинор искажения в каждой точке отображаемой поверхности (120). 5. Тензор главных направлений отображения (121). 6. Главная сеть отображения (122).
- § 62. Конформное и эквиваральное отображение поверхностей 128
1. Гауссово определение конформного отображения (123). 2. Конформное преобразование плоскости (124). 3. Осуществление конформного преобразования (126). 4. Бельтрамиева проекция сферы на плоскость (127). 5. Нормальное отображение параллельных поверхностей (128). 6. Стереографическое отображение сферы на плоскость (128). 7. Изменение компонент параллельного перенесения при конформном преобразовании поверхности (128). 8. Эквиваральное отображение (129).

§ 63. Сферическое изображение поверхности	129
1. Сферическое изображение поверхности (129). 2. Главные линии сферического изображения (130). 3. Сферическое изображение линий кривизны (131). 4. Сферическое изображение вблизи параболической точки поверхности (132). 5. Сферическое изображение и гауссова кривизна поверхности (134).	
§ 64. Определение поверхности её сферическим изображением	136
1. Метрический тензор единичной сферы (136). 2. Поле векторов, выходящих из точек сферы (137). 3. Вспомогательные соотношения на сфере (137). 4. Дифференциальные уравнения единичной сферы (138). 5. Скаляр, определяющий метрическую форму сферы (139). 6. Теорема Вейнгартена (140). 7. Другая форма производных формул Вейнгартена (142). 8. Определение поверхности по второй и третьей основным её формам (142). 9. Определение средней и гауссовой кривизны поверхности её второй и третьей формами (143).	
§ 65. Геодезическое отображение поверхностей	144
1. Постановка задачи (144). 2. Тривиальные случаи геодезического отображения (144). 3. Уравнения Вейля (145). 4. Преобразование уравнений Вейля (147). 5. Тензор геодезического отображения (149). 6. Поверхности, допускающие нетривиальное геодезическое отображение на другую поверхность (151). 7. Теорема Дарбу (152). 8. Теорема Дини (154).	
§ 66. Картографическая проблема	156
1. Задача картографии (156). 2. Ортографическая проекция (156). 3. Глобулярная проекция (159). 4. Цилиндрические проекции (161). 5. Меркаторова проекция (162). 6. Ламбертова аквареальная проекция (164). 7. Эквиреальная проекция Мольвейде (166). 8. Конические проекции (168). 9. Коническая конформная карта Ламберта (169). 10. Азимутальная проекция (170). 11. Задача о наилучшей проекции при построении карт (173).	
ГЛАВА ЧЕТЫРНАЦАТАЯ	
ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ	
§ 67. Изометрическое отображение поверхностей	177
1. Изометрическое отображение одной поверхности на другую (177). 2. Уравнения Христоффеля (178). 3. Дискретные изометрии двух поверхностей (179). 4. Непрерывные изометрии двух поверхностей (183).	
§ 68. Общая задача об изгибании поверхностей	184
1. Задача об изгибании поверхностей (184). 2. Дифференциальное уравнение Бианки (185). 3. Применение уравнения Бианки к решению общей задачи об изгибании (187). 4. Метод Дарбу (190). 5. Гауссова кривизна формы Дарбу (191). 6. Дифференциальное уравнение Дарбу (193). 7. Группа автоморфизмов положительной квадратичной формы (194).	
§ 69. Специальные задачи изгибания поверхностей	194
1. Обзор уже рассмотренных случаев изгибания поверхности (194). 2. Инварианты изгибания (196). 3. Движение поверхности в самой себе (196). 4. Изгибание поверхности с сохранением твёрдой кривой (198). 5. Теорема Джеллетта (199). 6. Изгибание поверхности с сохранением твёрдой асимптотической линии (201).	
§ 70. Изгибание линейчатых поверхностей	202
1. Изгибание горсов (202). 2. Виртуальная асимптотическая сеть (202). 3. Изгибание поверхности с сохранением одного семейства асимптотических линий (204). 4. Изгибание линейчатой поверхности в линейчатую же (206).	

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

ТЕНЗОР ДАРБУ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ К ПОВЕРХНОСТЯМ
ВТОРОГО ПОРЯДКА

- § 71. Тензор Дарбу 208
1. Аполярные тензоры (208). 2. Тензор Дарбу (209). 3. Направления Дарбу в заданной точке поверхности и линии Дарбу на поверхности (210). 4. Линии Дарбу (211). 5. Формулы Фосса (213). 6. Формулы проективного преобразования второй основной формы поверхности (214). 7. Вспомогательный афинор (215). 8. Формулы проективного преобразования компонент параллельного перенесения на поверхности (216). 9. Формула проективного преобразования кривизны поверхности (218). 10. Формулы проективного преобразования тензоров Кодаци и Дарбу (218).
- § 72. Тензор Дарбу и поверхности второго порядка 220
1. Тензор Дарбу на поверхностях второго порядка (220). 2. Характеристический признак поверхности второго порядка (220). 3. Теорема Бонне (224). 4. Поверхности вращения (223). 5. Координаты Чеваро (224). 6. Разыскание основных форм поверхности в координатах Чеваро (226). 7. Полином Чеваро (228). 8. Характеристический полином Чеваро для поверхностей второго порядка (229). 9. Основная теорема (232).

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

МЕТРИЧЕСКИЕ ИСТОКИ АФИННОЙ И ПРОЕКТИВНОЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

- § 73. Модификация тензора Кодаци и метрические истоки аффинной дифференциальной геометрии 284
1. Руководящие идеи аффинной дифференциальной геометрии (234). 2. Предварительные соображения (235). 3. Квадратичная форма центра аффинной дифференциальной геометрии поверхностей (236). 4. Квадратичная форма эвклидовой аффинной дифференциальной геометрии поверхностей (238). 5. Вспомогательный вектор и кубическая форма аффинной дифференциальной геометрии поверхностей (239). 6. Аффинная нормаль и производные формулы (241). 7. Аффинная дифференциальная геометрия поверхностей (242).
- § 74. Формы Фубини и метрические истоки проективной дифференциальной геометрии 248
1. Формы Фубини (243). 2. Сопоставление форм Фубини с основными формами эвклидовой аффинной дифференциальной геометрии (245). 3. Формы Фубини в проективном пространстве (248). 4. Проективные формы Фубини (249). 5. Построение форм Фубини в проективном пространстве (250). 6. Формы Фубини в асимптотических координатах (252). 7. Нормальные проективные координаты и нормирование форм Фубини (253). 8. Проективный линейный элемент (254). 9. Проективная нормаль и основные уравнения проективной дифференциальной геометрии (255).

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

НАЧАЛА УЧЕНИЯ О ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ

- § 75. Основные формы, определяющие прямолинейную конгруэнцию 257
1. Прямолинейные конгруэнции и конфигурации Куммера (257). 2. Момент луча конгруэнции относительно данной точки (258). 3. Первый основной тензор конгруэнции (259). 4. Вторая основная форма конгруэнции (260). 5. Постановка вопроса (261). 6. Лемма (262). 7. Интегрирование системы уравнений (13) (263). 8. Уравнение Санниа (264). 9. Основная теорема теории конгруэнций (265). 10. Тензоры Рашевского (265).
- § 76. Конфигурации Куммера 266
1. Квадратичные формы конгруэнции (266). 2. Конфигурация Куммера (267). 3. Производные формулы (267). 4. Основная теорема теории куммеровых конфигураций (268). 5. Выражение тензора конгруэн-

ции через величины куммеровой конфигурации, в состав которой она входит (269). 6. Выражение второго тензора конгруэнции через тензоры содержащей её куммеровой конфигурации (270). 7. Преобразование основного уравнения (271).

§ 77. Поверхности, связанные с конгруэнцией 271

1. Средняя поверхность конгруэнции (271). 2. Уравнение средней поверхности конгруэнции, выраженное в величинах, определяющих конгруэнцию (272). 3. Исследование средней поверхности (273). 4. Эллиптические, параболические и гиперболические лучи конгруэнции (275). 5. Линейчатые поверхности конгруэнции (275). 6. Развёртывающиеся поверхности конгруэнции (277). 7. Фокусы и фокальные поверхности конгруэнции (277). 8. Главные линейчатые поверхности конгруэнции (279). 9. Нормальные конгруэнции (280). 10. Криволинейная конгруэнция векторного поля (281). 11. Изгибание конгруэнции (281). 12. Инвариант изгибания конгруэнции (282). 13. Расширение понятия об изгибании конгруэнции (283).

ГЛАВА ВОСЕМНАДЦАТАЯ

МЕТРИЧЕСКАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ И ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 78. Гонометрическая форма на поверхности 284

1. Принцип двойственности (284). 2. Уравнение геодезической линии на сфере (285). 3. Расстояние между двумя точками на сфере (286). 4. Вспомогательная формула (287). 5. Метрическая форма сферы или эллиптической плоскости в бальтрамиевых координатах (287). 6. Угол между двумя большими кругами на сфере (288). 7. Лонгометрическая и гонометрическая формы сферы (289). 8. Эллиптическая плоскость (290). 9. Гонометрическое исследование эллиптической плоскости (290). 10. Гонометрическая площадь бесконечно малого треугольника (292). 11. Гонометрические интегральные инварианты (293). 12. Гиперболическая плоскость (294). 13. Гонометрическая форма гиперболической плоскости (296). 14. Гонометрическая форма на поверхностях, развёртывающихся на плоскость (297).

§ 79. Гонометрическое семейство кривых 298

1. Гауссова и финслерова формы (298). 2. Гонометрическое семейство кривых (300). 3. Гонометрические семейства кругов на плоскости (301). 4. Гонометрические семейства кругов другого типа (303). 5. Гонометрическая дифференциальная геометрия семейства кругов (304).

§ 80. Характеристический признак гонометрического семейства кривых на плоскости 305

1. Дифференциальное уравнение гонометрического семейства кривых (305). 2. Задание двупараметрического семейства кривых по способу Рашевского (306). 3. Два дифференциальных оператора (307). 4. Дифференциальное уравнение Рашевского (310). 5. Достаточность установленного условия (311). 6. Ближайшее рассмотрение найденного условия (313). 7. Изменение кривизны кривых конгруэнции при конформном преобразовании плоскости (314). 8. Квазиокружности. Характеристический признак семейства квазиокружностей (316). 9. Уравнение Рашевского для квазиокружностей (318). 10. Поверхности с гонометрическим семейством геодезических линий (320).

§ 81. Гонометрические семейства кривых от трёх параметров 321

1. Теорема Рашевского (321). 2. Дифференциальные уравнения трёхпараметрического семейства кривых (322). 3. Включение двухпараметрического семейства в трёхпараметрическое (323). 4. Уточнение состава характеристической функции для гонометрической системы (324).

§ 82. Начала интегральной геометрии 325

1. Гонометрическая площадь множества геодезических линий (325). 2. Гонометрическая площадь круга на сфере (326). 3. Гонометрическая

площадь отрезка геодезической линии на сфере (327). 4. Гонометрическая площадь прямолинейного отрезка на евклидовой плоскости (328). 5. Развитие теоремы Крофтона (329). 6. Инвариант Картана (332). 7. Приложения к теории вероятностей (335). 8. Интегральная геометрия (336).

ГЛАВА ДЕВЯТНАДЦАТАЯ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЕТЕЙ

§ 83. Начала общей теории сетей	338
1. Регулярное однопараметрическое семейство кривых на поверхности (338). 2. Сеть и её дифференциальное уравнение (339). 3. Инварианты сетевого тензора (342). 4. Нормирование сетевого тензора и его инвариантов (343). 5. Геометрическое значение нормированного первого инварианта сети (344). 6. Выражение компонент одного из направляющих векторов сети через компоненты второго направляющего вектора и сетевого угла (345). 7. Градиент сетевого угла (346). 8. Скаляры, сохраняющие постоянное значение на каждой линии одного из семейств сети (346).	
§ 84. Чебышевская сеть и чебышевский вектор	347
1. Аналитические условия, определяющие чебышевскую сеть (347). 2. Уравнения Сервана-Бианки (348). 3. Чебышевские сети на любой поверхности (349). 4. Чебышевские сети на плоскости (350). 5. Формулы Дубнова и их интерпретация (352). 6. Чебышевские векторы сети (354). 7. Соотношения, связывающие чебышевские векторы сети (355). 8. Чебышевский вектор чебышевской сети (356). 9. Получебышевская сеть (359). 10. Выражение компонент чебышевского вектора через компоненты направляющих векторов сети (361). 11. Выражение компонент чебышевского вектора сети через компоненты её ненормированного тензора (362). 12. Вычисление компонент чебышевского вектора для специальных сетей (362).	
§ 85. Инвариантные признаки сетей и поверхностей	365
1. Постановка задачи (365). 2. Инвариантные признаки поверхности вращения и цилиндра (365). 3. Геодезические кривизны линий сети (366). 4. Геодезическая сеть (367). 5. Преобразование уравнений, характеризующих геодезическую сеть (367). 6. Вектор кривизны сети (368). 7. Вектор кривизны координатной сети (370). 8. Инвариантный признак поверхностей второго порядка (370). 9. Полугеодезическая сеть (372). 10. Инвариантный признак линейчатой поверхности (372). 11. Изменение чебышевского вектора при преобразовании поверхности (372). 12. Изменение чебышевского вектора при конформном преобразовании поверхности (374). 13. Третий чебышевский вектор (375). 14. Ромбическая сеть (376). 15. Изотермическая сеть (377). 16. Изотермические поверхности (378). 17. Инвариантные признаки торсов различных типов (379).	
§ 86. Изгибание на главном основании	381
1. Определение изгибания на главном основании (381). 2. Основное свойство сети изгибания (383). 3. Изгибание на главном основании (384). 4. Виртуально сопряжённая сеть (384). 5. Решение одной задачи тензорной алгебры (385). 6. Выражение чебышевского вектора сети, определяемой тензором (19) (387). 7. Условия, определяющие простое или главное основание (390). 8. Определение всех поверхностей, которые получаются при изгибании одной из них на главном основании (392).	
Литература	395
Именной указатель	408
Предметный указатель	404