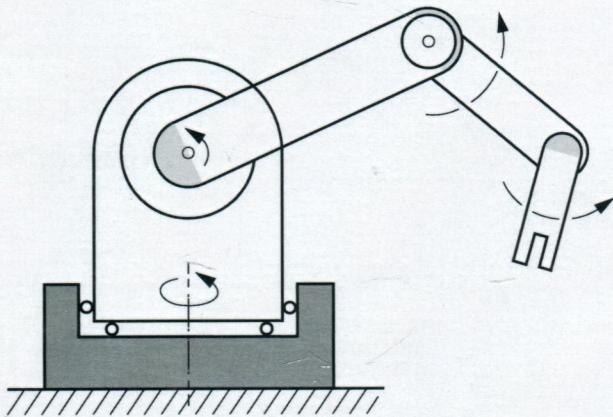


В. Шилен, П. Эберхард

# ПРИКЛАДНАЯ ДИНАМИКА

Численное моделирование  
механических систем в машиностроении



R&C  
Dynamics

**Werner Schiehlen, Peter Eberhard**

# **Technische Dynamik**

**Rechnergestützte Modellierung mechanischer  
Systeme im Maschinen- und Fahrzeugbau**

Mit 71 Abbildungen

3. Auflage

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

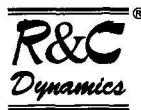
В. Шилен, П. Эберхард

# ПРИКЛАДНАЯ ДИНАМИКА

**Численное моделирование  
механических систем в машиностроении**

Перевод с немецкого  
В. В. Шуликовской

Под редакцией  
д. ф.-м. н., проф. Б. С. Бардина,  
д. ф.-м. н., проф. И. И. Косенко



Москва ♦ Ижевск

2018

УДК 519.7

ББК 22.181

Ш 57

**Шилен В., Эберхард П.**

Ш 57      Прикладная динамика. Численное моделирование механических систем в машиностроении. — М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» ; Институт компьютерных исследований, 2018. — 264 с.

ISBN 978-5-4344-0437-2

Эта книга написана профессорами Штутгартского технического университета Вернером Шиленом и Петером Эберхардом — учителем и учеником. Содержание ее в своем роде уникально. Авторам удалось в компактной форме изложить сложнейший материал формального описания и компьютерного моделирования динамики систем многих тел. При этом под термином «тело» здесь понимается не только абсолютно твердое, но и деформируемое упругое тело. В книге описываются оригинальные методики построения уравнений движения систем тел, а также алгоритмы дискретизации при помощи метода конечных элементов и алгоритмы, основанные на применении континуальных формализмов механики сплошной среды, и, в частности, методах вычисления собственных значений и собственных функций. Кроме того, в круг рассматриваемых вопросов входят и задачи теории управляемого движения. Все изложение опирается на принципы и методы аналитической механики.

Книга предназначена для широкого круга читателей. В первую очередь это студенты старших курсов и аспиранты технических университетов, а также преподаватели дисциплин соответствующего профиля. Она может быть полезна инженерам и научным работникам.

Оригинальное издание (на немецком языке): Schiehlen, W., Eberhard, P. Technische Dynamik – Rechnergestützte Modellierung mechanischer Systeme im Maschinen- und Fahrzeugbau. Wiesbaden: Springer Vieweg; 2014.

**ББК 22.181**

**УДК 519.7**

**ISBN 978-5-4344-0437-2**

© В. Шилен, П. Эберхард, 2018

© Ижевский институт компьютерных исследований, 2018

---

# Оглавление

|  |      |
|--|------|
| Предисловие редакторов перевода . . . . .              | ix   |
| Предисловие к русскому изданию . . . . .               | xi   |
| Предисловие к третьему изданию . . . . .               | xiii |
| Предисловие ко второму изданию . . . . .               | xv   |
| Предисловие к первому изданию . . . . .                | xvii |
| <br>ГЛАВА 1. Введение . . . . .                        | 1    |
| 1.1. Задачи прикладной динамики . . . . .              | 1    |
| 1.2. Роль аналитической механики . . . . .             | 2    |
| 1.3. Моделирование механических систем . . . . .       | 3    |
| 1.3.1. Системы твердых тел . . . . .                   | 4    |
| 1.3.2. Метод конечных элементов . . . . .              | 6    |
| 1.3.3. Сплошные среды . . . . .                        | 7    |
| 1.3.4. Системы деформируемых тел . . . . .             | 8    |
| 1.3.5. Выбор замещающей механической системы . . . . . | 9    |
| 1.3.6. Число степеней свободы . . . . .                | 9    |
| <br>ГЛАВА 2. Основы кинематики . . . . .               | 13   |
| 2.1. Свободные системы . . . . .                       | 13   |
| 2.1.1. Кинематика точки . . . . .                      | 13   |
| 2.1.2. Кинематика абсолютно твердого тела . . . . .    | 20   |
| 2.1.3. Кинематика сплошной среды . . . . .             | 41   |
| 2.2. Голономные системы . . . . .                      | 50   |
| 2.2.1. Системы материальных точек . . . . .            | 51   |
| 2.2.2. Системы твердых тел . . . . .                   | 58   |
| 2.2.3. Сплошная среда . . . . .                        | 61   |
| 2.3. Неголономные системы . . . . .                    | 62   |
| 2.4. Подвижные системы координат . . . . .             | 68   |
| 2.4.1. Подвижная система координат . . . . .           | 68   |

|   |     |
|---|-----|
| 2.4.2. Свободные и голономные системы . . . . .                               | 71  |
| 2.4.3. Неголономные системы . . . . .   | 74  |
| 2.5. Линеаризация кинематики . . . . .  | 74  |
| <br>ГЛАВА 3. Основы кинетики . . . . .  | 79  |
| 3.1. Кинетика точки . . . . .   | 80  |
| 3.1.1. Уравнения Ньютона . . . . .  | 80  |
| 3.1.2. Типы сил . . . . .   | 81  |
| 3.2. Кинетика твердого тела . . . . .   | 86  |
| 3.2.1. Уравнения Ньютона и Эйлера . . . . .                                   | 86  |
| 3.2.2. Геометрия масс абсолютно твердого тела . . . . .                       | 93  |
| 3.2.3. Динамика относительного движения . . . . .                             | 96  |
| 3.3. Кинетика сплошной среды . . . . .  | 97  |
| 3.3.1. Уравнения Коши . . . . .   | 98  |
| 3.3.2. Закон Гука . . . . .   | 100 |
| 3.3.3. Реакции связей . . . . .   | 101 |
| <br>ГЛАВА 4. Принципы механики . . . . .                                      | 103 |
| 4.1. Принцип виртуальных перемещений . . . . .                                | 103 |
| 4.2. Принципы Даламбера, Журдена и Гаусса . . . . .                           | 110 |
| 4.3. Принцип минимума потенциальной энергии . . . . .                         | 114 |
| 4.4. Принцип Гамильтона . . . . .   | 115 |
| 4.5. Уравнения Лагранжа первого рода . . . . .                                | 117 |
| 4.6. Уравнения Лагранжа второго рода . . . . .                                | 118 |
| <br>ГЛАВА 5. Системы твердых тел . . . . .                                    | 121 |
| 5.1. Локальные уравнения движения . . . . .                                   | 122 |
| 5.2. Уравнения Ньютона–Эйлера . . . . .                                       | 126 |
| 5.3. Уравнения движения систем с идеальными связями . . . . .                 | 129 |
| 5.3.1. Обыкновенные системы твердых тел . . . . .                             | 129 |
| 5.3.2. Системы твердых тел общего вида . . . . .                              | 138 |
| 5.4. Уравнения реакций в системах с идеальными связями . . . . .              | 147 |
| 5.4.1. Расчет реакций . . . . .   | 147 |
| 5.4.2. Оценка прочности . . . . .   | 151 |
| 5.4.3. Балансировка масс в системах твердых тел . . . . .                     | 154 |
| 5.5. Уравнения движения и реакции в системах с неидеальными связями . . . . . | 157 |
| 5.6. Гирокопические уравнения для спутников . . . . .                         | 159 |

---

|  |            |
|--|------------|
| 5.7. Формализмы для систем твердых тел . . . . .                 | 162        |
| 5.7.1. Нерекурсивные формализмы . . . . .                        | 163        |
| 5.7.2. Рекурсивные формализмы . . . . .                          | 168        |
| <b>ГЛАВА 6. Системы конечных элементов . . . . .</b>             | <b>175</b> |
| 6.1. Локальные уравнения движения . . . . .                      | 176        |
| 6.1.1. Тетраэдральный элемент . . . . .                          | 176        |
| 6.1.2. Пространственный балочный элемент . . . . .               | 178        |
| 6.2. Глобальные уравнения движения . . . . .                     | 184        |
| 6.3. Система балок . . . . .                                     | 187        |
| 6.4. Расчет прочности . . . . .                                  | 194        |
| <b>ГЛАВА 7. Системы сплошных сред . . . . .</b>                  | <b>197</b> |
| 7.1. Локальные уравнения движения . . . . .                      | 197        |
| 7.2. Собственные функции для бруса . . . . .                     | 200        |
| 7.3. Глобальные уравнения движения . . . . .                     | 203        |
| <b>ГЛАВА 8. Механические системы и общая динамическая теория</b> | <b>209</b> |
| 8.1. Нелинейные уравнения состояния . . . . .                    | 209        |
| 8.2. Линейные уравнения состояния . . . . .                      | 211        |
| 8.3. Преобразование линейных уравнений . . . . .                 | 211        |
| 8.4. Нормальные формы . . . . .                                  | 214        |
| <b>ГЛАВА 9. Численные методы . . . . .</b>                       | <b>219</b> |
| 9.1. Интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений .      | 219        |
| 9.2. Линейная алгебра автономных систем . . . . .                | 222        |
| 9.3. Сравнение механических моделей . . . . .                    | 227        |
| <b>Приложение. Необходимые сведения из математики . . . . .</b>  | <b>231</b> |
| A.1. Представление функций . . . . .                             | 231        |
| A.2. Алгебра матриц . . . . .                                    | 232        |
| A.3. Матричный анализ . . . . .                                  | 236        |
| A.4. Список наиболее важных обозначений . . . . .                | 236        |
| <b>Литература . . . . .</b>                                      | <b>243</b> |