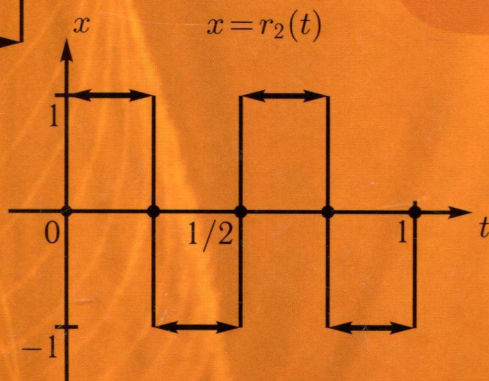
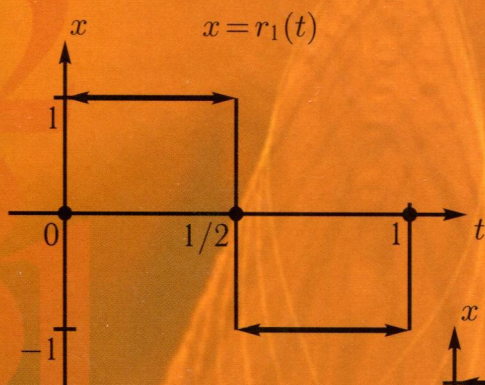


С. В. АСТАШКИН

# СИСТЕМА РАДЕМАХЕРА В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ



С. В. АСТАШКИН

**СИСТЕМА  
РАДЕМАХЕРА  
В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ  
ПРОСТРАНСТВАХ**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2017

УДК 517.982.27

ББК 22.317

А 91

Асташкин С. В. **Система Радемахера в функциональных пространствах.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. — 552 с. — ISBN 978-5-9221-1703-6.

В книге дано систематическое изложение свойств системы Радемахера с точки зрения теории функций и функционального анализа. Наряду с классическими вопросами, в ней представлены результаты последних десятилетий, в особенности относящиеся к взаимосвязи свойств этой системы с геометрией содержащих ее функциональных пространств.

Книга предназначена научным работникам, специализирующимся в области функционального анализа и теории функций, а также студентам старших курсов и аспирантам математических факультетов университетов.

ISBN 978-5-9221-1703-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2017

© С. В. Асташкин, 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	10
Обозначения . . . . .	16
<b>Глава 1. Функции Радемахера в <math>L_p</math>-пространствах . . . . .</b>	<b>21</b>
§ 1.1. Определение и простейшие свойства . . . . .	21
§ 1.2. Сходимость рядов Радемахера п. в. . . . .	24
§ 1.3. Неравенство Хинчина и экспоненциальная оценка распределений . . . . .	27
§ 1.4. Неравенство Пэли–Зигмунда . . . . .	33
§ 1.5. $K$ -функционал в паре $(\ell_1, \ell_2)$ . . . . .	35
§ 1.6. Неравенства Хитченко и Монтгомери–Смита . . . . .	41
Комментарии и литературные указания . . . . .	45
<b>Глава 2. Система Радемахера в симметричных пространствах, «далеких» от <math>L_\infty</math> . . . . .</b>	<b>48</b>
§ 2.1. Радемахеровское подпространство с. п. . . . .	48
§ 2.2. Экспоненциальная суммируемость рядов по системе Радемахера. Теорема Родина–Семёнова . . . . .	52
§ 2.3. Эквивалентность системы Радемахера каноническому базису $\ell_1$ . . . . .	59
§ 2.4. Дополняемость $\mathcal{R}(X)$ в с. п. . . . .	60
Комментарии и литературные указания . . . . .	65
<b>Глава 3. Система Радемахера в симметричных пространствах, «близких» к <math>L_\infty</math> . . . . .</b>	<b>67</b>
§ 3.1. Описание подпространства, порожденного системой Радемахера . . . . .	67
§ 3.2. С. п. с одним и тем же радемахеровским подпространством: интерполяционный случай . . . . .	72
§ 3.3. С. п. с одним и тем же радемахеровским подпространством: общий случай . . . . .	82
§ 3.4. Примеры радемахеровских подпространств с. п. . . . .	88
§ 3.5. Функции Радемахера и конусы ступенчатых функций . . . . .	94
Комментарии и литературные указания . . . . .	106

Глава 4. Суммы Радемахера с векторными коэффициентами . . . . .	108
§ 4.1. Неравенство Кахана–Хинчина и его следствия . . . . .	108
§ 4.2. Оценки распределений отклонений норм сумм Радемахера . . . . .	115
§ 4.3. Неравенства типа Монтгомери–Смита и Хитченко для векторнозначных сумм Радемахера . . . . .	120
§ 4.4. Векторнозначные суммы Радемахера в экспоненциальных пространствах Орлича . . . . .	128
§ 4.5. Сравнение распределений векторнозначных рядов Радемахера с их «слабыми» аналогами. . . . .	129
§ 4.6. Подпространство с. п. на квадрате, порожденное суммами Радемахера с векторными коэффициентами. . . . .	135
Комментарии и литературные указания . . . . .	147
Глава 5. Оптимальные константы в неравенствах Хинчина и Кахана–Хинчина . . . . .	149
§ 5.1. Мажоризация и вогнутость по Шуру. . . . .	149
§ 5.2. Гипотеза Литлвуда. Сравнение $L_1$ - и $L_2$ -норм сумм Радемахера . . . . .	155
§ 5.3. Вычисление константы $K_{2,4}$ . . . . .	158
§ 5.4. Значения констант $K_{p,q}^{\mathbb{R}}$ при четных $p$ и $q$ . . . . .	164
§ 5.5. Асимптотическое равенство оптимальных «скалярных» и «векторных» констант . . . . .	166
§ 5.6. Оптимальная константа в неравенстве Хинчина для пространства Орлича $L_{N_2}$ . . . . .	170
Комментарии и литературные указания . . . . .	171
Глава 6. Хаос Радемахера в симметричных пространствах . . . . .	174
§ 6.1. Определение хаоса Радемахера и сходимость п. в. рядов по этой системе . . . . .	174
§ 6.2. Хаос Радемахера как базисная последовательность . . . . .	179
§ 6.3. Безусловность хаоса Радемахера в с. п. . . . .	181
§ 6.4. Дополняемость подпространства, порожденного хаосом Радемахера . . . . .	202
Комментарии и литературные указания . . . . .	205
Глава 7. Сравнение систем с. в. . . . .	208
§ 7.1. Принцип сжатия для последовательности Радемахера и его следствия . . . . .	209
§ 7.2. Принцип сравнения функций распределения с. в. . . . .	214
§ 7.3. Сравнение систем с. в. с последовательностью функций Радемахера: скалярный случай . . . . .	217
§ 7.4. Сравнение систем с. в. с последовательностью функций Радемахера: векторный случай . . . . .	224

§ 7.5. Мультипликативные системы с. в. . . . .	226
§ 7.6. Последовательности характеров на компактной абелевой группе . . . . .	230
Комментарии и литературные указания . . . . .	234
<b>Глава 8. Выделение лакунарных подсистем. . . . .</b>	<b>236</b>
§ 8.1. Подсистемы, мажорируемые по распределению последовательностью Радемахера . . . . .	236
§ 8.2. Выделение подсистем, эквивалентных по распределению последовательности Радемахера . . . . .	241
§ 8.3. Плотность подсистем, эквивалентных по распределению наборам функций Радемахера . . . . .	252
§ 8.4. Выделение подсистем с «субрадемахеровскими» $L_p$ -нормами полиномов . . . . .	263
Комментарии и литературные указания . . . . .	266
<b>Глава 9. Экстремальные свойства системы Радемахера . . . . .</b>	<b>269</b>
§ 9.1. Система Радемахера и упорядоченность Харди–Литлвуда . . . . .	269
§ 9.2. Модулярные неравенства для сумм независимых симметрично распределенных с. в. . . . .	274
§ 9.3. Экстремальность последовательности Радемахера в классе равномерно ограниченных систем . . . . .	278
§ 9.4. Одна экстремальная задача . . . . .	286
Комментарии и литературные указания . . . . .	293
<b>Глава 10. Процесс Бернулли . . . . .</b>	<b>295</b>
§ 10.1. Принцип сжатия для процесса Бернулли . . . . .	295
§ 10.2. Минорантная оценка типа Судакова . . . . .	298
§ 10.3. Гипотеза Бернулли . . . . .	302
§ 10.4. $L$ -регулярность сумм Радемахера и теорема о сравнении распределений случайных векторов. . . . .	305
§ 10.5. О связи между сравнениями систем с. в. с последовательностью Радемахера в скалярном и в векторном смысле . . . . .	309
Комментарии и литературные указания . . . . .	311
<b>Глава 11. Пространство мультипликаторов, порожденное системой Радемахера . . . . .</b>	<b>313</b>
§ 11.1. Определение и свойства пространства $\mathcal{M}(X)$ . . . . .	314
§ 11.2. Симметричное ядро пространства мультипликаторов . . . . .	320
§ 11.3. Описание с. п. $X$ , для которых $\mathcal{M}(X) = L_\infty$ . . . . .	332

§ 11.4. Пространства $X$ с симметричным пространством $\mathcal{M}(X)$ , отличным от $L_\infty$ . . . . .	341
§ 11.5. «Хвостовое» пространство мультипликаторов . . . . .	360
Комментарии и литературные указания . . . . .	377
<b>Глава 12. Варианты неравенства Хинчина . . . . .</b>	<b>379</b>
§ 12.1. Локальное неравенство Хинчина в классе с.п. . . . .	380
§ 12.2. Нижняя локальная $L_2$ -оценка для сумм Радемахера . . . . .	389
§ 12.3. Весовое неравенство Хинчина . . . . .	394
§ 12.4. Варианты $L_1$ -неравенства Хинчина . . . . .	403
Комментарии и литературные указания . . . . .	414
<b>Глава 13. Мартингалные преобразования последовательности Радемахера в с.п. . . . .</b>	<b>416</b>
§ 13.1. Мартингалные преобразования и система Хаара . . . . .	418
§ 13.2. Мартингалные преобразования, порожденные моментом остан- новки . . . . .	419
§ 13.3. Ряды Радемахера с независимыми коэффициентами . . . . .	425
§ 13.4. Мартингалные преобразования, порожденные линейными комби- нациями функций Радемахера . . . . .	429
Комментарии и литературные указания . . . . .	434
<b>Глава 14. Функции Радемахера в пространствах <math>BMO</math> и Пэли . . . . .</b>	<b>436</b>
§ 14.1. Определение и свойства $BMO$ -пространств . . . . .	436
§ 14.2. Суммы Радемахера в $BMO$ -пространствах . . . . .	439
§ 14.3. О дополняемости радемахеровских подпространств в простран- ствах $BMO_d$ и $BMO$ . . . . .	443
§ 14.4. Структура радемахеровского подпространства в $BMO$ . . . . .	446
§ 14.5. Определение и свойства пространств Пэли . . . . .	452
§ 14.6. Радемахеровские проекции в пространствах Пэли . . . . .	455
§ 14.7. Подпара банаховой пары $(L_\infty, \mathcal{P}(L_\infty))$ , порожденная системой Радемахера . . . . .	461
Комментарии и литературные указания . . . . .	462
<b>Глава 15. Функции Радемахера в пространствах Чезаро . . . . .</b>	<b>464</b>
§ 15.1. Определение пространств Чезаро . . . . .	464
§ 15.2. Суммы Радемахера в пространствах Чезаро . . . . .	467
§ 15.3. Дополняемость радемахеровских подпространств в пространствах Чезаро . . . . .	473
§ 15.4. Структура радемахеровского подпространства в пространстве $K_q$ . . . . .	477
Комментарии и литературные указания . . . . .	485

---

Глава 16. <b>Функции Радемахера в пространствах Морри</b> . . . . .	486
§ 16.1. Предварительные сведения о пространствах Морри . . . . .	486
§ 16.2. Суммы Радемахера в пространствах Морри . . . . .	489
§ 16.3. Дополняемость радемахеровского подпространства в $M_{w,p}$ , $p > 1$ . . . . .	493
§ 16.4. Радемахеровское подпространство пространства $M_{w,1}$ . . . . .	496
§ 16.5. Структура радемахеровских подпространств в пространствах Морри. . . . .	502
Комментарии и литературные указания . . . . .	507
Приложение А. Несколько понятий и результатов из теории вероятностей . . . . .	509
Приложение Б. Базисные последовательности и лакунарные системы . . . . .	512
Приложение В. Банаховы функциональные решетки и симметричные пространства. . . . .	519
Приложение Г. Интерполяция операторов и пространства вещественного метода . . . . .	528
Список литературы . . . . .	534
Предметный указатель . . . . .	547