

В. Д. НОГИН

**СУЖЕНИЕ  
МНОЖЕСТВА  
ПАРЕТО**

**АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД**

PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO

PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO

PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO

PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO PARETO

**PARETO PARETO PARETO**

**PARETO PARETO**

**PARETO**

В. Д. НОГИН

# СУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2016

УДК 519.8  
ББК 22.18  
Н 72

Ногин В. Д. **Сужение множества Парето: аксиоматический подход.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 272 с. — ISBN 978-5-9221-1638-1.

Рассматриваются вопросы выбора решений при наличии нескольких числовых критериев. Излагается оригинальный общий подход к решению многокритериальных задач при наличии количественной информации об отношении предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Считаются выполненными четыре аксиомы «разумного» выбора. Вводится понятие кванта информации об отношении предпочтения ЛПР. Исследуется вопрос сужения множества Парето на основе конечного набора квантов информации. Показывается, что с помощью предлагаемого подхода можно достаточно хорошо аппроксимировать множество потенциально оптимальных решений многокритериальной задачи. Рассматриваются задачи как с четким, так и с нечетким отношением предпочтения. Изучается возможность комбинирования аксиоматического подхода с другими известными методами.

Предназначена всем, кто по роду своей деятельности сталкивается с необходимостью решения многокритериальных задач, — исследователям, инженерам-разработчикам, конструкторам, проектировщикам, экономистам-аналитикам и т.п. Может быть использована студентами старших курсов и аспирантами не только математических, но и экономических, а также технических специальностей.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
Обозначения . . . . .	9
Введение . . . . .	11
<b>Глава 1. Принцип Эджворта–Парето . . . . .</b>	<b>17</b>
1.1. Задача многокритериального выбора . . . . .	17
1.1.1. Множество возможных и множество выбираемых решений (17). 1.1.2. Лицо, принимающее решение (19). 1.1.3. Векторный критерий (20). 1.1.4. Многокритериальная задача (21). 1.1.5. Отношение предпочтения (22). 1.1.6. Задача многокритериального выбора (23).	
1.2. Бинарные отношения . . . . .	24
1.2.1. Определение бинарного отношения (24). 1.2.2. Типы бинарных отношений (25). 1.2.3. Отношения порядка (26).	
1.3. Аксиома исключения и множество недоминируемых решений . . . . .	27
1.3.1. Требование асимметричности отношения предпочтения (27). 1.3.2. Аксиома исключения (27). 1.3.3. Множество недоминируемых решений (29).	
1.4. Принцип Эджворта–Парето . . . . .	30
1.4.1. Аксиома Парето (30). 1.4.2. Множество и принцип Парето (30). 1.4.3. Свойство минимальности аксиом исключения и Парето (32).	
1.5. Аксиомы транзитивности и согласования . . . . .	32
1.5.1. Аксиома транзитивности (32). 1.5.2. Аксиома согласования (34).	
1.6. Свойства множества Парето . . . . .	37
1.6.1. Множества парето-оптимальных решений и векторов (37). 1.6.2. Нахождение множества Парето (37). 1.6.3. Алгоритм построения множества Парето (39). 1.6.4. Геометрия двумерного множества Парето (40).	
<b>Глава 2. Сужение множества Парето с использованием простейшего кванта информации . . . . .</b>	<b>42</b>
2.1. Требование инвариантности отношения предпочтения . . . . .	42
2.1.1. Отношения, инвариантные относительно линейного положительного преобразования (42). 2.1.2. Конусные отношения (43).	
2.2. Определение простейшего кванта информации . . . . .	49
2.2.1. Исходная задача многокритериального выбора (49). 2.2.2. Мотивация определения простейшего кванта информации (50). 2.2.3. Определение простейшего кванта (51). 2.2.4. Свойства	

	простейшего кванта информации (52). 2.2.5. Связь с лексикографическим отношением (54).	
2.3.	Использование простейшего кванта информации для сужения множества Парето . . . . .	55
	2.3.1. Упрощение определения простейшего кванта (55). 2.3.2. Сужение множества Парето на основе простейшего кванта информации (57). 2.3.3. Геометрические аспекты (63).	
2.4.	Шкалы критериев и инвариантность измерений . . . . .	66
	2.4.1. Количественные и качественные шкалы (66). 2.4.2. Инвариантность множества Парето относительно строго возрастающего преобразования критериев (69). 2.4.3. Инвариантность результатов теоремы 2.5 относительно линейного положительного преобразования критериев (69).	
<b>Глава 3. Сужение множества Парето на основе общего кванта информации . . . . .</b>		
	<b>3.1. Определение и свойства общего кванта информации . . . . .</b>	<b>72</b>
	3.1.1. Основные определения (72). 3.1.2. Свойства кванта информации (73).	
	<b>3.2. Использование кванта информации для сужения множества Парето . . . . .</b>	<b>76</b>
	3.2.1. Упрощенное определение кванта информации (76). 3.2.2. Сужение множества Парето на основе кванта информации (77).	
	<b>3.3. Геометрические иллюстрации к задаче с тремя критериями . . . . .</b>	<b>85</b>
	3.3.1. Трехкритериальная задача общего вида (85). 3.3.2. Случай линейных критериев (86).	
<b>Глава 4. Сужение множества Парето при помощи простейших наборов квантов информации . . . . .</b>		
	<b>4.1. Непротиворечивость набора квантов информации . . . . .</b>	<b>88</b>
	4.1.1. Предварительное рассмотрение (88). 4.1.2. Определение непротиворечивого набора векторов (89). 4.1.3. Критерии непротиворечивости (90). 4.1.4. Существенность информации об отношении предпочтения (95).	
	<b>4.2. Учет двух простейших квантов информации . . . . .</b>	<b>97</b>
	4.2.1. Случай двух взаимно независимых квантов (97). 4.2.2. Случай, когда один критерий более значим, чем два других (98). 4.2.3. Сужение множества Парето на основе информации о том, что два критерия по отдельности значимее третьего (104).	
	<b>4.3. Сужение множества Парето на основе конечного числа некоторых квантов информации . . . . .</b>	<b>108</b>
	4.3.1. Использование квантов информации точечно-множественного типа (108). 4.3.2. Использование набора информации множественно-точечного типа (114).	
<b>Глава 5. Сужение множества Парето на основе наборов квантов информации . . . . .</b>		
	<b>5.1. Замкнутые наборы квантов информации . . . . .</b>	<b>119</b>
	5.1.1. Замкнутый набор из двух квантов информации (119). 5.1.2. Замкнутый набор из четырех квантов информации (132).	



5.2. Циклические наборы квантов информации . . . . .	140
5.2.1. Определение и непротиворечивость циклического набора квантов информации (140). 5.2.2. Сужение множества Парето на основе циклических наборов квантов информации (143).	
5.3. Геометрический алгоритм построения нового векторного критерия. . . . .	150
5.3.1. Предварительное рассмотрение (150). 5.3.2. Геометрический алгоритм и его обоснование (152).	
5.4. Алгебраический алгоритм пересчета векторного критерия . . . . .	157
5.4.1. Геометрическая постановка задачи (157). 5.4.2. Нахождение образующих двойственного конуса (158). 5.4.3. Алгоритм учета квантов информации (165).	
5.5. Сужение конечного множества Парето . . . . .	165
5.5.1. Идея подхода (165). 5.5.2. Мажорантное отношение (166). 5.5.3. Пример (168). 5.5.4. Алгоритм построения оценки сверху (169).	
<b>Глава 6. Полнота наборов квантов информации . . . . .</b>	<b>171</b>
6.1. Предварительное рассмотрение . . . . .	171
6.1.1. Постановка задачи (171). 6.1.2. Геометрические аспекты (172). 6.1.3. Расстояние между конусами (173).	
6.2. Первая теорема о полноте. . . . .	176
6.2.1. Постановка математической задачи (176). 6.2.2. Первая теорема о полноте (176).	
6.3. Вторая теорема о полноте. . . . .	178
6.3.1. Пример (178). 6.3.2. Вторая теорема о полноте (179). 6.3.3. Случай конечного множества возможных векторов (181).	
<b>Глава 7. Сужение множества Парето при помощи нечеткой информации . . . . .</b>	<b>183</b>
7.1. Постановка задачи нечеткого многокритериального выбора . . . . .	183
7.1.1. Вспомогательные сведения из теории нечетких множеств (183). 7.1.2. Задача нечеткого многокритериального выбора (185). 7.1.3. Аксиомы разумного нечеткого выбора (187). 7.1.4. Нечеткий принцип Парето (188).	
7.2. Нечеткая информация об отношении предпочтения и ее непротиворечивость . . . . .	189
7.2.1. Определение и некоторые свойства кванта информации о нечетком отношении предпочтения (189). 7.2.2. Непротиворечивость набора квантов нечеткой информации (192).	
7.3. Сужение множества Парето на основе кванта нечеткой информации . . . . .	195
7.3.1. Основной результат (195). 7.3.2. Пример (197). 7.3.3. Случай нечеткого множества возможных решений (199).	
7.4. Сужение множества Парето на основе наборов квантов нечеткой информации. . . . .	200
7.4.1. Использование двух квантов нечеткой информации для сужения множества Парето (200). 7.4.2. Пример (203). 7.4.3. Кванты нечеткой циклической информации и их непротиворечивость (205). 7.4.4. Сужение множества Парето за счет простейшего кванта нечеткой циклической информации (206).	

Глава 8. <b>Методология и практика принятия решений на основе квантов информации</b> . . . . .	214
8.1. Как принимает решение человек? . . . . .	214
8.1.1. Психические составляющие процесса принятия решений (214). 8.1.2. Стратегии принятия решений человеком в многокритериальной среде (217).	
8.2. Методология применения аксиоматического подхода к сужению множества Парето . . . . .	220
8.2.1. Формирование математической модели (220). 8.2.2. Выявление информации об отношении предпочтения ЛПР (223). 8.2.3. Последовательное сужение множества Парето (225).	
8.3. Выбор с использованием линейной свертки критериев . . . . .	229
8.3.1. Метод линейной свертки (229). 8.3.2. Линейная свертка как средство выбора конкретного парето-оптимального вектора (231). 8.3.3. Применение линейной свертки на завершающем этапе сужения множества Парето (236).	
8.4. Комбинированные методы . . . . .	237
8.4.1. Модифицированный метод целевого программирования (237). 8.4.2. Метод достижимых целей при наличии квантов информации (241).	
8.5. Выбор оптимальной величины таможенной пошлины. . . . .	244
8.5.1. Постановка задачи (244). 8.5.2. Решение поставленных задач (246).	
8.6. Задача увеличения выпуска продукции с учетом затрат на ресурсы 253	
8.6.1. Постановка задачи (253). 8.6.2. Сужение множества Парето (255).	
8.7. Ослабление основной аксиоматики . . . . .	258
8.7.1. Ослабление аксиомы согласования (258). 8.7.2. Ослабление аксиомы инвариантности (260).	
Заключение . . . . .	262
Список литературы . . . . .	266
Предметный указатель . . . . .	270