

А.А. Туганбаев



**ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ
КЛАССИЧЕСКИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ
АЛГЕБРЫ КВАТЕРНИОНОВ**

ФЛИНТА

Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

А.А. Туганбаев

**ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ
КЛАССИЧЕСКИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ
АЛГЕБРЫ КВАТЕРНИОНОВ**

Монография

Москва
Издательство «ФЛИНТА»
2024

УДК 515.145.2
ББК 22.151.5
Т81

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда
№ 22-11-00052, <https://rscf.ru/project/22-11-00052>*

Туганбаев А.А.

Т81 Тензорные произведения. Классические локализации. Алгебры кватернионов: монография / А.А. Туганбаев. – Москва : ФЛИНТА, 2024. – 176 с. – ISBN 978-5-9765-5402-3. – Текст : непосредственный.

В данной книге исследуются свойства тензорных произведений модулей, классических локализаций колец A и кольцевые свойства (обобщенных) алгебр кватернионов $({}^a A^b)$ над произвольными коммутативными кольцами A с обратимыми элементами a, b .

УДК 515.145.2
ББК 22.151.5

ISBN 978-5-9765-5402-3

© Туганбаев А.А., 2024

© Издательство «ФЛИНТА», 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
1. Проективные и дистрибутивные модули	16
1.1. Свободные и полупростые модули	16
1.1.1. Свободные модули и их базисы	16
1.1.2. Матричное представление гомоморфизмов	19
1.1.3. Нётеровы и артиновы модули	20
1.1.4. Полупростые модули	23
1.2. Проективность и относительная проективность	42
1.2.1. Относительно проективные модули	42
1.2.2. Проективные модули	43
1.3. Радикал	46
1.3.1. Свойства радикала, I	47
1.3.2. Свойства радикала, II	50
1.4. Локальные, полулокальные и полусовершенные кольца ...	55
1.4.1. Локальные модули, кольца и идемпотенты	55
1.4.2. Полулокальные кольца	57
1.4.3. Подъем идемпотентов и полусовершенные кольца ...	59
1.5. Сингулярный подмодуль. Несингулярные модули	63
1.5.1. Несингулярные и сингулярные модули	63
1.5.2. Несингулярные кольца и условия конечности	66
1.6. Дистрибутивные модули и кольца	70
1.6.1. Дистрибутивные модули	70
1.6.2. Дистрибутивные кольца	80
2. Тензорные произведения и плоские модули	81
2.1. Тензорные произведения	81
2.2. Плоские модули	83
2.2.1. Модули без H-кручения	83
2.2.2. Свойства плоских модулей	84

2.2.3. Плоские подмодули и $\mathfrak{r}\mathfrak{f}$ -кольца	90
2.2.4. Плоские модули и проективность	96
2.3. Совершенные кольца	101
2.3.1. Полуартиновы модули и t -нильпотентность	101
2.3.2. Полунётеровы модули и $\mathfrak{m}\mathfrak{a}\mathfrak{x}$ -кольца	107
3. Классические локализации	113
3.1. Кольца частных и множества знаменателей	113
3.1.1. Кольца частных по множествам Ore	113
3.1.2. Кольца частных по множествам знаменателей	125
3.1.3. Локализуемые кольца	131
3.1.4. Локализации по максимальным идеалам	135
3.2. Модули частных по множествам знаменателей	140
3.2.1. Свойства модулей частных	141
3.2.2. S -насыщенные подмножества. S -насыщения	142
3.2.3. Свойства модулей частных, Π	144
4. Алгебры кватернионов	147
4.1. Общие свойства алгебр кватернионов	147
4.1.1. Простейшие свойства	147
4.1.2. Неделители нуля. Обратимые, центральные и радикальные элементы	148
4.1.3. (a, b) -кольца	149
4.2. Идеалы алгебр кватернионов	151
4.2.1. Свойства идеалов при $2^{-1} \in A$	151
4.2.2. Кольцевые свойства $({}^a A^b)$ при $2^{-1} \in A$	151
4.2.3. Теоремы об алгебрах $({}^a A^b)$ при $2^{-1} \in A$	153
4.2.4. Алгебра гамильтоновых кватернионов	159
5. Справочный материал	163
5.1. Полугруппы и моноиды	164
5.1.1. Полугруппы и моноиды. Подполугруппы и подмоноиды	164

5.1.2. Полугрупповые и моноидные гомоморфизмы	165
5.1.3. Аддитивная и мультипликативная записи	165
5.1.4. Обратимость. Группы	166
5.2. Кольца, предкольца и подкольца. Тела и поля	167
5.2.1. Кольца, предкольца и подкольца	167
5.2.2. Тела и поля	168
5.3. Модули, подмодули, гомоморфизмы, алгебры	168
5.3.1. Модули и подмодули	168
5.3.2. Гомоморфизмы. Алгебры	170
Предметный указатель	172