

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ВЫЧИСЛЕНИЙ

С. Б. Гашков



E.LANBOOK.COM

С. Б. ГАШКОВ

ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ВЫЧИСЛЕНИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



ЛАНЬ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР

2023

УДК 510.5
ББК 22.12я73

Г 24 **Гашков С. Б.** Теория алгоритмов и вычислений : учебное пособие для вузов / С. Б. Гашков. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 168 с. : ил. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-507-46897-3

В первой части дается введение в теорию алгоритмов (часто называемую также теорией вычислимых функций или просто теорией вычислимости). Намечаются разные варианты её построения, основанные на использовании теории рекурсивных функций, машин Тьюринга, Поста и Минского, бесконечного абака, алгорифмов Маркова и экзотического языка Фрактран, предложенного Конвеем. Приводятся классические примеры алгоритмически неразрешимых проблем. Во второй части излагаются основы теории NP-полных задач. Доказывается NP-полнота ряда классических комбинаторных проблем переборного характера, таких как проблема выполнимости логических формул, проблемы коммивояжера, упаковки рюкзака, размена монет, поиска минимального покрытия и максимальной клики и др. Рассматриваются точные и приближенные алгоритмы для решения этих задач.

В конце каждой части приводится список задач, дополняющих ее содержание. К некоторым из них даны указания к решению.

В основу книги положен семестровый курс, читавшийся автором на факультете математики и компьютерных наук Бакинского филиала МГУ им. М. В. Ломоносова.

УДК 510.5
ББК 22.12я73

Рецензент

Р. М. КОЛПАКОВ — доктор физико-математических наук,
профессор механико-математического факультета
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Обложка

П. И. ПОЛЯКОВА

© Издательство «Лань», 2023
© С. Б. Гашков, 2023
© Издательство «Лань», художественное
оформление, 2023

Оглавление

1	Вычислимые функции	4
1.1	Машины Тьюринга	4
1.1.1	Машины Поста	9
1.2	Тьюрингово программирование и тьюринговы диаграммы	12
1.3	Алгоритмически неразрешимые проблемы	15
1.4	Вычисления на абакe	19
1.5	Рекурсивные функции	23
1.5.1	Элементарные примитивно-рекурсивные функции	28
1.5.2	Рекурсивные функции одной переменной и теорема Клини	29
1.5.3	Универсальные функции	34
1.6	Разрешимые и перечислимые множества и предикаты	39
1.6.1	Сложно вычислимые предикаты	44
1.7	Операторные алгоритмы Минского	44
1.7.1	Доказательство частичной рекурсивности функций, вычисляемых по Тьюрингу	50
1.7.2	Многоленточные машины Минского	52
1.7.3	Фрактран	53
1.8	Диофантовы множества и предикаты	58
1.9	Нормальные алгоритмы	66
1.9.1	Проблема тождества слов в полугруппах	71
1.10	Задачи	75
2	NP-полные задачи	86
2.1	Схемы, предикаты и конъюнктивные нормальные формы	86
2.2	Моделирование машины Тьюринга булевыми схемами	91

2.3	Классы P и NP . Теорема Кука	96
2.3.1	Схемная сложность языков и класс $P/Poly$	100
2.4	NP -полные задачи	102
2.4.1	Частные случаи NP -полных задач	115
2.5	Алгоритмы для точного решения некоторых NP -полных задач	123
2.5.1	Динамическое программирование	123
2.5.2	Псевдополиномиальные алгоритмы	125
2.5.3	Метод ветвей и границ	127
2.6	Приближенные алгоритмы решения NP -полных задач	129
2.6.1	Жадные алгоритмы	129
2.6.2	Полиномиальные алгоритмы с ограниченной погрешностью	134
2.6.3	Алгоритмы локальной минимизации	138
2.7	Задачи	141