

И. В. Арнольд

---

# ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

---

*Максимально  
доступное изложение*

*Более 300 задач  
различной  
степени сложности*



URSS

---

**И. В. Арнольд**

# **ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

Издание второе



**URSS**  
**МОСКВА**

**Арнольд Игорь Владимирович**

**Теория чисел: Учебное пособие. Изд. 2-е. — М.: ЛЕНАНД, 2017.  
288 с.**

Вниманию читателей предлагается книга математика и методиста И. В. Арнольда, посвященная проблемам теории чисел. Среди них — логическое обоснование и обобщение понятия числа в связи с общим аксиоматическим определением скалярного числового поля, теория делимости, простые числа, задачи аддитивной теории чисел, теория сравнений и т. д. В конце книги прилагается краткий исторический справочник, в котором освещены основные моменты развития теории чисел в рамках затронутых в книге вопросов, а также даются упражнения разной степени трудности, требующие, однако, для решения лишь элементарных приемов.

Книга рекомендуется студентам и преподавателям педагогических и естественных вузов, учителям математики, методистам.

Формат 60×90/16. Печ. л. 18. Зак. № АЛ-348.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-9710-4068-2

© ЛЕНАНД, 2016

19948 ID 221971



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

## ОГЛАВЛЕНИЕ.

Стр.

Предисловие . . . . .	5
-----------------------	---

### Глава I. Рациональные числа.

§	1. Основные законы действий над числами . . . . .	7
	2. Скалярные числовые поля и их свойства . . . . .	8
	3. Свойства обратных операций в числовом поле . . . . .	11
§	4. Система рациональных чисел как минимальное скалярное числовое поле . . . . .	14
§	5. Аксиоматика натурального ряда . . . . .	15
	6. Действия над натуральными числами . . . . .	17
	7. Обобщение понятия числа. Метод пар . . . . .	20
§	8. Теория целых чисел как пар натуральных чисел . . . . .	22
	9. Теория рациональных чисел как пар целых чисел . . . . .	25
§	10. Действительные числа . . . . .	28

### Глава II. Теория делимости и алгоритм Евклида

§	11. Отношение делимости и его простейшие свойства . . . . .	31
	12. Общий наибольший делитель и наименьшее кратное двух чисел . . . . .	33
§	13. Общий наибольший делитель и наименьшее кратное нескольких чисел . . . . .	36
§	14. Теория делимости в поле рациональных чисел . . . . .	38
	15. Алгоритм Евклида . . . . .	41
§	16. Элементарная теория непрерывных дробей . . . . .	46
§	17. Неопределенные уравнения первой степени с двумя неизвестными . . . . .	52

### Глава III. Простые числа.

§	18. Разложение на первоначальные множители . . . . .	60
	19. Разложение больших чисел на множители . . . . .	62
	20. Теорема Вильсона . . . . .	—
§	21. Критерии Эйлера . . . . .	64
§	22. Следствия теоремы о разложении на первоначальные множители . . . . .	69
	23. Числовая функция Эйлера . . . . .	76
	24. Решето Эратосфена . . . . .	81
	25. Формула Лежандра . . . . .	83
§	26. Вопрос о распределении простых чисел в натуральном ряду . . . . .	91
§	27. О порядке величины $\pi(x)$ при $x \rightarrow \infty$ . . . . .	103

### Глава IV. Задачи аддитивной теории чисел.

§	28. Разбиение чисел на слагаемые . . . . .	116
	29. Теорема Эйлера-Лежандра . . . . .	119
§	30. Рекуррентные соотношения, вытекающие из теоремы Эйлера-Лежандра . . . . .	123
§	31. Разложение натуральных чисел на сумму двух квадратов . . . . .	127
	32. Разложение натуральных чисел на сумму четырех квадратов . . . . .	130
§	33. Проблема Варинга . . . . .	134

## Глава V. Теория сравнений.

Стр.

§ 34. Понятие о сравнении. Классы равноостаточных чисел по данному модулю . . . . .	137
§ 35. Основные свойства сравнений. Операции сложения и умножения по данному модулю. Признаки делимости чисел . . . . .	140
§ 36. Операция деления. Делители нуля. Приведенная система вычетов . . . . .	144
§ 37. Решение сравнений первой степени . . . . .	147
§ 38. Дроби по простому модулю . . . . .	151
§ 39. Теоремы Ферма и Эйлера. Приложения к решению сравнений первой степени . . . . .	154
§ 40. О числе решений сравнений высших степеней . . . . .	158
§ 41. Степенные вычеты . . . . .	160
§ 42. Первообразные корни простого модуля . . . . .	162
§ 43. Первообразные корни модуля $p^a$ . . . . .	165
§ 44. Теория индексов и ее приложения . . . . .	166
§ 45. Приложения теории степенных вычетов к выводу признаков делимости . . . . .	171
§ 46. Периодические дроби, получающиеся при обращении простых дробей в десятичные . . . . .	173
§ 47. Сравнения по функциональному и двойному модулю . . . . .	180

## Глава VI. Рациональные приближения иррациональных чисел. Алгебраические и трансцендентные числа.

§ 48. Введение . . . . .	183
§ 49. Представление иррациональных чисел непрерывными дробями . . . . .	185
§ 50. Эквивалентные числа . . . . .	190
§ 51. Рациональные приближения действительных чисел и подходящие дроби . . . . .	193
§ 52. Уравнение Пелля . . . . .	201
§ 53. Разложение квадратических иррациональностей в непрерывную дробь . . . . .	203
§ 54. Решение уравнения Пелля . . . . .	208
§ 55. Рациональные приближения алгебраических чисел . . . . .	211
§ 56. Трансцендентность чисел $e$ и $\pi$ . . . . .	217

## Глава VII. Неопределенные уравнения высших степеней.

§ 57. Положительные квадратичные формы . . . . .	225
§ 58. Неопределенные квадратичные формы . . . . .	234
§ 59. Задача Ферма . . . . .	240

## Приложения:

Краткий историко-биографический справочник . . . . .	248
Упражнения . . . . .	254
Числовые таблицы . . . . .	268