

Б А К А Л А В Р И А Т

И.А. Палий

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА

У Ч Е Б Н О Е П О С О Б И Е



ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ – БАКАЛАВРИАТ

серия основана в 1996 г.



И.А. ПАЛИЙ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

3-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Межрегиональным учебно-методическим советом профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим и экономическим направлениям подготовки (квалификация (степень) «бакалавр») (протокол № 4 от 13.04.2022)

Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com

Москва
ИНФРА-М
2025

УДК 519.2(075.8)

ББК 22.17я73

П14

Автор:

Палий И.А., доцент, доцент Сибирского государственного автомобильно-дорожного университета (СибАДИ)

Рецензенты:

В.А. Далингер, доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и методики обучения математике Омского государственного педагогического университета;

Б.С. Добронеев, доктор физико-математических наук, профессор кафедры систем искусственного интеллекта Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета (г. Красноярск)

Палий И.А.

П14 Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / И.А. Палий. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2025. — 426 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/1859126.

ISBN 978-5-16-017505-8 (print)

ISBN 978-5-16-110025-7 (online)

Учебное пособие является вводным курсом теории вероятностей и математической статистики. Рассмотрены элементы комбинаторики, основные понятия и теоремы теории вероятностей, дискретные случайные величины, непрерывные случайные величины, некоторые предельные теоремы, одномерные и двумерные выборки, точечное и интервальное оценивание параметров генеральной совокупности, проверка статистических гипотез, элементы теории массового обслуживания. Изложение теоретического материала сопровождается большим числом подробно разобранных примеров решения задач.

Для студентов технических и экономических направлений подготовки и специальностей, обучающихся по программам бакалавриата и специалитета.

УДК 519.2(075.8)

ББК 22.17я73

ISBN 978-5-16-017505-8 (print)
ISBN 978-5-16-110025-7 (online)

© Палий И.А., 2012, 2021
© Палий И.А., 2022, с изменениями

Оглавление

Предисловие	3
--------------------------	----------

Глава 1. Элементы комбинаторики	5
--	----------

1.1. Принцип умножения	5
1.2. Перестановки.....	7
1.3. Размещения	8
1.4. Сочетания	9
1.5. Перестановки с повторениями	11
1.6. Сочетания с повторениями.....	12
1.7. Бином Ньютона.....	13

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава 2. Исходные понятия теории вероятностей	15
--	-----------

2.1. Эксперимент, элементарный исход эксперимента, пространство элементарных исходов.....	15
2.2. События и действия над ними.....	17
2.3. Диаграммы Венна	18
2.4. Примеры решения задач	19
2.5. Формула включения и исключения	24

Глава 3. Классическое определение вероятности	27
--	-----------

3.1. Определение и простейшие свойства.....	27
3.2. Теорема сложения вероятностей	27
3.3. Задача о выборке.....	28
3.4. Примеры решения задач	28
3.5. Независимые события и условные вероятности. Теорема умножения вероятностей	32

Глава 4. Аксиомы теории вероятностей	34
---	-----------

4.1. Простейшие следствия из аксиом	35
4.2. Примеры вероятностных пространств.....	35
4.3. Примеры решения задач	37

Глава 5. Некоторые формулы	40
---	-----------

5.1. Независимые события и условные вероятности.....	40
5.2. Иллюстрация применения формул теории вероятностей	43
5.3. Формулы полной вероятности и Байеса	48
5.4. Примеры решения задач	49

Глава 6. Испытания по схеме Бернулли	55
---	-----------

6.1. Формула Бернулли.....	55
6.2. Наивероятнейшее число появлений «успеха» в n независимых испытаниях.....	56
6.3. Обобщение формулы Бернулли	57
6.4. Формула Пуассона.....	57
6.5. Примеры решения задач	58

Глава 7. Понятие о дискретных случайных величинах.....	62
7.1. Определение дискретной случайной величины и ее закона распределения.....	62
7.2. Некоторые распределения (биномиальное, Пуассона, геометрическое, гипергеометрическое).....	65
7.3. Функция распределения дискретной случайной величины	66
7.4. Примеры решения задач	68
Глава 8. Распределение двух дискретных случайных величин, определенных на одном и том же пространстве Ω (системы двух случайных величин).....	75
8.1. Примеры решения задач	76
8.2. Функция распределения системы двух дискретных случайных величин.....	79
8.3. Функции двух дискретных случайных величин	82
8.4. Примеры решения задач	82
Глава 9. Числовые характеристики дискретных случайных величин	86
9.1. Математическое ожидание	86
9.2. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение	90
9.3. Другие числовые характеристики	92
9.4. Ковариация. Дисперсия суммы случайных величин в общем случае.....	93
9.5. Коэффициент корреляции.....	94
9.6. Примеры решения задач	96
Глава 10. Понятие о непрерывных случайных величинах.....	105
10.1. Определение непрерывной случайной величины. Функция распределения и функция плотности вероятности непрерывной случайной величины	105
10.2. Примеры решения задач	108
10.3. Понятие о функции непрерывной случайной величины.....	111
10.4. Примеры решения задач	112
10.5. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.....	114
10.6. Примеры решения задач	118
10.7. Равномерный, показательный и нормальный законы распределения.....	126
10.7.1. Показательное распределение	128
10.8. Примеры решения задач	133
Глава 11. Понятие о системах непрерывных случайных величин.....	135
11.1. Функция плотности вероятности системы двух непрерывных случайных величин	136
11.2. Примеры решения задач	137
11.3. Понятие о функции двух непрерывных случайных величин	141
11.4. Примеры решения задач	142
11.5. Понятие о числовых характеристиках системы двух непрерывных случайных величин	148
11.5.1. Числовые характеристики функции системы двух непрерывных случайных величин.....	148
11.5.2. Ковариация и коэффициент корреляции	148
11.5.3. Математическое ожидание и дисперсия суммы непрерывных случайных величин.....	149
11.5.4. Свойства коэффициента корреляции	150
11.6. Примеры решения задач	150

Глава 12. Неравенство Чебышева, понятие о законе больших чисел и центральной предельной теореме	153
12.1. Неравенство Чебышева	153
12.2. Понятие о законе больших чисел	154
12.3. Понятие о центральной предельной теореме	156
12.4. Локальная и интегральная теоремы Лапласа	157
12.5. Примеры решения задач	158

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ СТАТИСТИКУ

Глава 13. Генеральная совокупность и выборка из генеральной совокупности	163
13.1. Представление выборки	164
13.2. Числовые характеристики выборки	170

Глава 14. Обработка результатов наблюдений по методу наименьших квадратов	176
14.1. Двумерные выборки.....	176
14.2. Графическое представление двумерных выборок — диаграммы рассеяния	178
14.3. Выборочный коэффициент корреляции — числовая характеристика двумерной выборки	179
14.4. Метод наименьших квадратов	182
14.5. Другие уравнения регрессии.....	186
14.6. Расчет коэффициентов линейного уравнения регрессии по сгруппированным данным.....	190
14.7. Индекс корреляции	191
14.8. Индекс Фехнера и корреляционное отношение	192
14.9. О качестве нелинейных уравнений регрессии, построенных благодаря возможности их линеаризации.....	196

Глава 15. Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности по критерию Пирсона (критерию χ^2)	200
15.1. Пример.....	200
15.2. Немного теории.....	203
15.3. Другие примеры.....	206

Глава 16. Понятие о точечных и интервальных оценках параметров генеральной совокупности	216
16.1. Выборочные статистики	216
16.2. Точечные оценки параметров генеральной совокупности.....	217
16.3. О точности и надежности точечных оценок	220
16.4. Понятие об интервальных оценках параметров генеральной совокупности	226

Глава 17. Проверка статистических гипотез	236
17.1. Основные определения.....	236
17.1.1. Что такое статистическая гипотеза.....	236
17.1.2. О процедуре проверки нулевой гипотезы	236
17.1.3. Ошибки, допускаемые при проверке статистических гипотез.....	237
17.2. Проверка параметрических гипотез по критериям значимости.....	240
17.2.1. Проверка гипотезы о значении математического ожидания	240

17.2.2. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух генеральных совокупностей.....	245
17.2.3. Проверка гипотезы о значении дисперсии.....	247
17.2.4. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей.....	248
17.2.5. Проверка гипотезы о значении коэффициента корреляции ρ	249
17.3. Проверка непараметрических гипотез.....	251
17.3.1. Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности по критерию Колмогорова — Смирнова (λ -критерию).....	251
17.3.2. Проверка гипотезы об извлечении двух выборок из одной и той же генеральной совокупности.....	253
17.3.3. Проверка гипотезы о независимости двух дискретных случайных величин.....	258
17.4. Точный критерий Фишера.....	261
17.5. Ранговая корреляция.....	263
17.5.1. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена.....	264
17.5.2. Связанные ранги.....	266
17.5.3. Коэффициент ранговой корреляции Кендэла.....	266
17.5.4. Коэффициент конкордации Кендэла.....	268

Глава 18. Введение в теорию массового обслуживания..... 270

18.1. Основные определения.....	270
18.2. Простейший поток заявок.....	272
18.3. Системы массового обслуживания при наличии входного и выходного потоков. Обозначения и основные характеристики.....	278
18.4. Обобщенная модель системы массового обслуживания.....	280
18.5. Операционные характеристики работы СМО.....	284
18.6. Модель $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$	287
18.7. Модель $(M/M/1):(GD/N/\infty)$	291
18.8. Модель $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$	294
18.9. Модель $(M/M/c):(GD/N/\infty)$	298
18.10. Модель $(M/M/R):(GD/K/K)$, $R \leq K$	301
18.11. Модель $(M/G/1):(GD/\infty/\infty)$. Формула Поллачека — Хинчина.....	304
18.12. Одноканальные СМО с каналом, разделенным на два последовательных узла.....	306
18.13. О принятии решений в теории массового обслуживания.....	312

Библиографический список 319

Приложение 1. Нормальное распределение 321

Приложение 2. Распределение Стьюдента..... 324

Приложение 3. Распределение Фишера 326

Приложение 4. χ^2 -распределение..... 328

Дополнение. Решение заданий интернет-тестирования по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» 330