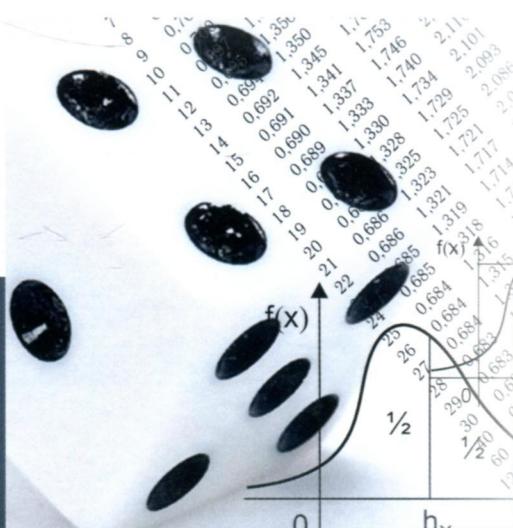


# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Б. Н. Иванов



лань



Б. Н. ИВАНОВ

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

*Учебное пособие*

Издание третье, стереотипное



ЛАНЬ

• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •  
• МОСКВА •  
• КРАСНОДАР •  
2024

УДК 519.2  
ББК 22.17я73

**И 20 Иванов Б. Н. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для вузов / Б. Н. Иванов. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 224 с. : ил. — Текст : непосредственный.**

**ISBN 978-5-507-49479-8**

Объем материала учебного пособия отвечает стандартному семестровому курсу. Изложение носит достаточно полный и строгий характер. Рассматриваемые вопросы обычны для начального курса теории вероятностей и математической статистики. Большое внимание уделяется решению задач и формализации их условий в рамках вероятностных пространств. По курсу студенты выполняют ряд индивидуальных заданий, сгруппированных по темам: комбинаторные схемы, случайные события, дискретные и непрерывные случайные величины, обработка результатов наблюдений. Приводятся примеры вариантов заданий и их решение.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям: «Математика и механика», «Физика астрономия», «Электро- и теплотехника», «Машиностроение», «Физико-технические науки и технологии», «Технологии материалов», и другим инженерно-техническим специальностям и направлениям подготовки. Книга будет полезна преподавателям, аспирантам и студентам других специальностей, изучающим теорию вероятностей и математическую статистику.

УДК 519.2  
ББК 22.17я73

**Рецензенты:**

*Г. Ш. ЦИЦИАШВИЛИ* — доктор физико-математических наук, профессор, зав. лабораторией Института прикладной математики ДВО РАН;  
*Н. Е. ДЕГТЬЯРЕВА* — кандидат технических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и анализа Дальневосточного федерального университета.

**Обложка**  
*E. A. ВЛАСОВА*

© Издательство «Лань», 2024  
© Б. Н. Иванов, 2024  
© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2024

# Оглавление

<b>Введение</b>	7
<b>1. Комбинаторные схемы</b>	8
1.1. Правило суммы . . . . .	8
1.2. Правило прямого произведения . . . . .	9
1.3. Размещения с повторениями . . . . .	9
1.4. Размещения без повторений . . . . .	10
1.5. Перестановки . . . . .	10
1.6. Сочетания . . . . .	11
1.7. Сочетания с повторениями . . . . .	13
1.8. Перестановки с повторениями, мульти множества . . . . .	14
1.9. Упорядоченные разбиения множества . . . . .	15
1.10. Неупорядоченные разбиения множества . . . . .	17
1.11. Принцип включения и исключения . . . . .	19
1.12. Полиномиальная формула . . . . .	23
1.13. Бином Ньютона . . . . .	23
1.14. Обобщенный бином Ньютона . . . . .	24
<b>2. Пространство элементарных событий</b>	26
2.1. Статистическое определение вероятности . . . . .	26
2.2. Пространство элементарных событий . . . . .	27
2.3. Классическое определение вероятности . . . . .	28
2.4. Геометрическая интерпретация событий . . . . .	30
2.5. Алгебра событий (аксиоматический подход) . . . . .	30
2.6. Аксиоматическое определение вероятности . . . . .	32
2.7. Принцип включения и исключения для вероятностей . . . . .	33
<b>3. Условные вероятности. Независимость событий</b>	38
3.1. Условные вероятности . . . . .	38
3.2. Независимость событий . . . . .	39
3.3. Полная группа событий . . . . .	40
3.4. Формула полной вероятности . . . . .	40
3.5. Формула Байеса. Теорема гипотез . . . . .	41
<b>4. Случайные величины</b>	45
4.1. Определение случайной величины . . . . .	45
4.2. Дискретное вероятностное пространство . . . . .	45
4.3. Геометрическое распределение . . . . .	46
4.4. Многомерная случайная величина . . . . .	47
4.5. Числовые характеристики случайных величин . . . . .	49
4.5.1. Математическое ожидание . . . . .	49
4.5.2. Дисперсия . . . . .	50
4.6. Ковариация . . . . .	51
4.7. Дисперсия суммы . . . . .	52
4.8. Производящая функция . . . . .	53
4.8.1. Геометрическое распределение . . . . .	53
<b>5. Повторные испытания</b>	55
5.1. Биномиальное распределение . . . . .	55

# Оглавление

<b>Введение . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>1. Комбинаторные схемы . . . . .</b>	<b>8</b>
1.1. Правило суммы . . . . .	8
1.2. Правило прямого произведения . . . . .	9
1.3. Размещения с повторениями . . . . .	9
1.4. Размещения без повторений . . . . .	10
1.5. Перестановки . . . . .	10
1.6. Сочетания . . . . .	11
1.7. Сочетания с повторениями . . . . .	13
1.8. Перестановки с повторениями, мульти множества . . . . .	14
1.9. Упорядоченные разбиения множества . . . . .	15
1.10. Неупорядоченные разбиения множества . . . . .	17
1.11. Принцип включения и исключения . . . . .	19
1.12. Полиномиальная формула . . . . .	23
1.13. Бином Ньютона . . . . .	23
1.14. Обобщенный бином Ньютона . . . . .	24
<b>2. Пространство элементарных событий . . . . .</b>	<b>26</b>
2.1. Статистическое определение вероятности . . . . .	26
2.2. Пространство элементарных событий . . . . .	27
2.3. Классическое определение вероятности . . . . .	28
2.4. Геометрическая интерпретация событий . . . . .	30
2.5. Алгебра событий (аксиоматический подход) . . . . .	30
2.6. Аксиоматическое определение вероятности . . . . .	32
2.7. Принцип включения и исключения для вероятностей . . . . .	33
<b>3. Условные вероятности. Независимость событий . . . . .</b>	<b>38</b>
3.1. Условные вероятности . . . . .	38
3.2. Независимость событий . . . . .	39
3.3. Полная группа событий . . . . .	40
3.4. Формула полной вероятности . . . . .	40
3.5. Формула Байеса. Теорема гипотез . . . . .	41
<b>4. Случайные величины . . . . .</b>	<b>45</b>
4.1. Определение случайной величины . . . . .	45
4.2. Дискретное вероятностное пространство . . . . .	45
4.3. Геометрическое распределение . . . . .	46
4.4. Многомерная случайная величина . . . . .	47
4.5. Числовые характеристики случайных величин . . . . .	49
4.5.1. Математическое ожидание . . . . .	49
4.5.2. Дисперсия . . . . .	50
4.6. Ковариация . . . . .	51
4.7. Дисперсия суммы . . . . .	52
4.8. Производящая функция . . . . .	53
4.8.1. Геометрическое распределение . . . . .	53
<b>5. Повторные испытания . . . . .</b>	<b>55</b>
5.1. Биномиальное распределение . . . . .	55

---

5.2. Другая модель биномиального распределения . . . . .	56
5.3. Числовые характеристики $B(n, k, p)$ . . . . .	56
5.3.1. Среднее значение и дисперсия . . . . .	56
5.3.2. Мода . . . . .	57
5.3.3. Медиана . . . . .	57
5.4. Производящая функция $B(n, k, p)$ . . . . .	58
5.5. Повторные испытания в задачах . . . . .	59
5.6. Гипергеометрическое распределение . . . . .	60
5.7. Отрицательное биномиальное распределение . . . . .	63
<b>6. Распределение Пуассона</b> . . . . .	67
6.1. Простейший поток событий . . . . .	67
6.2. Поток заявок на промежутке $\Delta t$ . . . . .	67
6.3. Поток заявок на интервале $[0, t]$ . . . . .	68
6.4. Числовые характеристики . . . . .	69
6.5. Характеристическая функция . . . . .	70
<b>7. Непрерывные случайные величины</b> . . . . .	72
7.1. Функция распределения . . . . .	72
7.2. Плотность распределения . . . . .	74
7.3. Многомерное распределение . . . . .	80
7.3.1. Функция распределения . . . . .	80
7.3.2. Плотность распределения . . . . .	81
7.3.3. Оператор усреднения . . . . .	86
7.3.4. Независимость случайных величин . . . . .	87
<b>8. Равномерное распределение</b> . . . . .	89
8.1. Функция распределения . . . . .	89
8.2. Плотность распределения . . . . .	90
8.3. Геометрические вероятности . . . . .	90
<b>9. Нормальное распределение</b> . . . . .	96
9.1. Плотность распределения . . . . .	96
9.2. Правило трех сигм . . . . .	97
9.3. Локальная теорема Муавра—Лапласа . . . . .	98
9.4. Интегральная теорема Муавра—Лапласа . . . . .	99
<b>10. Коэффициент корреляции</b> . . . . .	102
10.1. Коэффициент корреляции . . . . .	102
10.2. Линейная регрессия . . . . .	104
<b>11. Преобразование плотности распределения</b> . . . . .	107
11.1. Одномерное распределение . . . . .	107
11.2. Распределение хи-квадрат $\chi^2(1)$ . . . . .	108
11.3. Многомерное распределение . . . . .	109
11.4. Генераторы случайных чисел . . . . .	111
11.5. Экспоненциальное распределение . . . . .	112
11.6. Нормальное распределение . . . . .	112
11.7. Биномиальное распределение . . . . .	113
<b>12. Характеристическая функция</b> . . . . .	114
12.1. Свойства $g(t)$ . . . . .	114

12.2. Мультипликативность $g(t)$ . . . . .	114
12.2.1. Воспроизводящее свойство $g(t)$ по параметру . . . . .	115
<b>13. Специальные распределения</b> . . . . .	116
13.1. Гамма-функция . . . . .	116
13.2. Гамма-распределение . . . . .	116
13.3. Показательное распределение . . . . .	117
13.4. Нормальное распределение . . . . .	119
13.5. Распределение хи-квадрат Пирсона . . . . .	120
13.6. Распределение Стьюдента . . . . .	121
13.7. Распределение Фишера—Сnedекора . . . . .	122
<b>14. Закон больших чисел</b> . . . . .	123
14.1. Неравенство Чебышева . . . . .	123
14.2. Закон больших чисел . . . . .	124
14.3. Центральная предельная теорема . . . . .	125
<b>15. Решение задач индивидуальных заданий</b> . . . . .	128
15.1. Комбинаторные схемы . . . . .	128
15.2. Случайные события . . . . .	135
15.3. Случайные величины . . . . .	140
<b>16. Методы математической статистики</b> . . . . .	147
16.1. Теория выборочного метода . . . . .	147
16.2. Вариационный ряд выборки . . . . .	149
16.3. Эмпирическая функция распределения . . . . .	149
16.4. Гистограмма и полигон частот . . . . .	152
16.5. Функция распределения по сгруппированным данным . .	153
16.6. Выборочные характеристики случайных величин . . . . .	155
16.6.1. Числовые характеристики $\bar{x}$ . . . . .	156
16.6.2. Числовые характеристики $S^2$ . . . . .	157
<b>17. Методы построения статистик</b> . . . . .	159
17.1. Метод моментов К. Пирсона . . . . .	159
17.2. Метод максимального правдоподобия Р. Фишера . . . . .	160
17.3. Метод минимума хи-квадрат К. Пирсона . . . . .	161
<b>18. Распределение выборочных статистик</b> . . . . .	164
18.1. Спектральное разложение симметричных матриц . . . . .	164
18.2. Нормальные случайные величины . . . . .	165
18.3. Лемма Фишера . . . . .	169
18.4. Распределение выборочных статистик . . . . .	170
18.5. Критерий хи-квадрат К. Пирсона . . . . .	172
18.6. Критерий хи-квадрат, оценка параметров по выборке . .	179
<b>19. Интервальное оценивание параметров</b> . . . . .	180
19.1. Доверительный интервал . . . . .	180
19.2. Построение доверительного интервала . . . . .	180
19.3. Оценка параметров нормального распределения . . . . .	182
19.3.1. Оценка параметра $m$ , параметр $\sigma^2$ известен . . . . .	183
19.3.2. Оценка параметра $m$ , параметр $\sigma^2$ неизвестен . . . . .	184
19.3.3. Оценка параметра $\sigma^2$ , параметр $m$ известен . . . . .	185

19.3.4. Оценка параметра $\sigma^2$ , параметр $t$ неизвестен . . . . .	186
<b>20. Проверка статистических гипотез . . . . .</b>	<b>187</b>
20.1. Основные определения . . . . .	187
20.2. Примеры статистических гипотез . . . . .	188
20.3. Критерий согласия проверки гипотезы $H_0$ . . . . .	189
20.4. Ошибки первого и второго рода . . . . .	191
20.5. Общая схема проверки гипотезы . . . . .	192
20.6. Проверка гипотезы о виде распределения . . . . .	193
<b>21. Решение задач индивидуальных заданий . . . . .</b>	<b>197</b>
21.1. Пример индивидуального задания . . . . .	197
21.2. Решение задач индивидуального задания . . . . .	198
<b>22. Метод наименьших квадратов . . . . .</b>	<b>208</b>
22.1. Метод наименьших квадратов . . . . .	208
22.2. Линейная модель функциональной зависимости . . . . .	209
22.3. Средние оценки параметров линейной модели . . . . .	211
22.4. Пример зависимости высоты дуба от его возраста . . . . .	213
<b>23. Приложения . . . . .</b>	<b>215</b>
23.1. Нормальное распределение . . . . .	215
23.2. Квантили нормального распределения . . . . .	216
23.3. Квантили хи-квадрат распределения . . . . .	217
23.4. Квантили распределения Стьюдента . . . . .	218
<b>Литература . . . . .</b>	<b>219</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>220</b>