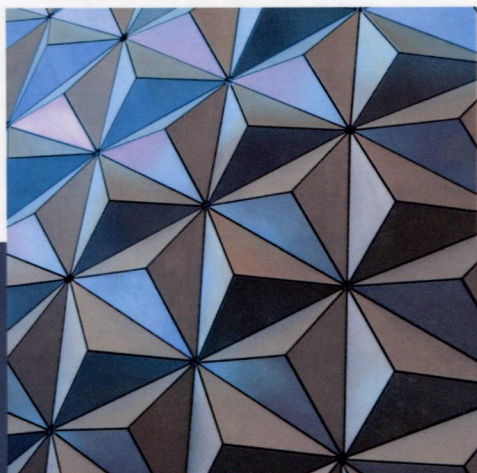


ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

# УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И РЕШЕТКИ



Е. М. Вечтомов  
Д. В. Широков



E.LANBOOK.COM

**Е. М. ВЕЧТОМОВ,  
Д. В. ШИРОКОВ**

# **УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И РЕШЕТКИ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**



**ЛАНЬ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР**

**2024**

УДК 512.55  
ББК 22.14я73

**В 39 Вечтомов Е. М.** Упорядоченные множества и решетки учебное пособие для вузов / Е. М. Вечтомов, Д. В. Широков. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 248 с. : ил. — Текст непосредственный.

**ISBN 978-5-507-48266-5**

Учебное пособие знакомит с основами порядковой структуры студентов аспирантов, преподавателей математики и информатики, всех интересующихся современной математикой. Порядковая структура относится к одному из фундаментальных типов математических структур, изучаемых и исследуемых в рамках теории упорядоченных множеств и решеток. Авторы книги являются активными сторонниками и популяризаторами специального изучения порядковой структуры, преподают дисциплину «Упорядоченные множества и решетки» для магистрантов-математиков.

Пособие предназначено для студентов вузов естественно-математических направлений подготовки.

УДК 512.55  
ББК 22.14я73

**Обложка**  
*П. И. ПОЛЯКОВА*

© Издательство «Лань», 2024  
© Е. М. Вечтомов,  
Д. В. Широков, 2024  
© Издательство «Лань», художественное  
оформление, 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ .....	
ВВЕДЕНИЕ .....	
Глава 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ .....	11
1.1. Множества.....	13
1.2. Бинарные отношения .....	20
1.3. Операции над семействами множеств .....	33
1.4. Алгебраические структуры.....	35
1.5. Топологические пространства.....	42
Глава 2. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА .....	57
2.1. Основные понятия и примеры.....	57
2.2. Конечные упорядоченные множества. Диаграммы Хассе .....	71
2.3. Операции над упорядоченными множествами.....	79
2.4. Размерность конечных упорядоченных множеств .....	86
2.5. Упорядоченные множества с условием минимальности .....	95
2.6. Линейно упорядоченные множества (цепи) .....	102
2.7. Вполне упорядоченные множества.....	106
2.8. Дополнения .....	110
2.8.1. Предложения, эквивалентные аксиоме выбора .....	110
2.8.2. Мощность множества .....	111
2.8.3. Общее понятие размерности упорядоченного множества .....	114
2.8.4. Применение к числовым системам .....	116
2.8.5. Линейно упорядоченные пространства .....	118
Глава 3. РЕШЕТКИ .....	120
3.1. Алгебраическое определение решетки.....	120
3.2. Основные понятия и примеры.....	124
3.3. Подрешетки и идеалы .....	128
3.4. Гомоморфизмы, конгруэнции, фактор-решетки.....	135
3.5. Прямые произведения .....	141
3.6. Полные решетки .....	146
3.7. Дополнение: многообразия решеток и свободные решетки ..	150
Глава 4. ДИСТРИБУТИВНЫЕ РЕШЕТКИ .....	155
4.1. Примеры и свойства .....	155
4.2. Характеризации .....	159
4.3. Простые идеалы .....	163
4.4. Представления .....	169
4.5. Конечные дистрибутивные решетки .....	172
4.6. Дополнение: дистрибутивные решетки как полукольца .....	178

Глава 5. БУЛЕВЫ РЕШЕТКИ .....	18
5.1. Примеры, свойства, характеристики .....	18
5.2. Представления .....	18
5.3. Полные и атомные булевы решетки .....	18
5.4. Дистрибутивные решетки с относительными дополнениями .....	191
5.5. Обобщенные булевы решетки и булевы кольца .....	193
5.6. Дополнения .....	199
5.6.1. Двойственность Стоуна .....	199
5.6.2. Счетные булевы решетки .....	202
ПРИЛОЖЕНИЯ .....	204
Приложение 1. Взаимосвязь конечных упорядоченных множеств, конечных дистрибутивных решеток и конечных $T_0$ -пространств .....	204
Приложение 2. Пятиэлементные упорядоченные множества .....	212
Приложение 3. Пятиэлементные топологические пространства ..	224
Приложение 4. Темы дипломных работ .....	230
Приложение 5. Персоналии .....	231
ЛИТЕРАТУРА .....	236
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ .....	242