

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В. Ю. Киселёв, Т. Ф. Калугина



«Инфра-Инженерия»

В. Ю. Киселёв, Т. Ф. Калугина

**ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
И ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

Учебное пособие

Москва Вологда
«Инфра-Инженерия»
2023

УДК 519.6+517.9
ББК 22.161.8
К44

Рецензент:

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ивановского государственного энергетического университета *Сковорода Борис Федосьевич*

Киселёв, В. Ю.

К44 Вариационное исчисление и теория оптимального управления : учебное пособие / В. Ю. Киселёв, Т. Ф. Калугина. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2023. – 132 с. : ил.
ISBN 978-5-9729-1416-6

Даны сведения по вариационному исчислению и оптимальному управлению. Рассмотрены некоторые геометрические и изопериметрические задачи, задачи со свободными концами. Представлены примеры решения задач.

Для студентов физико-математических, технических и экономических направлений подготовки. Может быть полезно преподавателям и инженерам.

УДК 519.6+517.9
ББК 22.161.8

В авторской редакции

ISBN 978-5-9729-1416-6 © Киселёв В. Ю., Калугина Т. Ф., 2023
© Издательство «Инфра-Инженерия», 2023
© Оформление. Издательство «Инфра-Инженерия», 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ	8
1.1. Об обозначениях производных	8
1.2. Постановка задачи	8
1.3. Вариация функционала J	9
1.4. Уравнение Эйлера	10
2. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ЛАГРАНЖИАНОВ РАЗНЫХ ВИДОВ	17
2.1. Лагранжиан, не зависящий от \dot{x}	17
2.2. Лагранжиан, не зависящий от x	17
2.3. Лагранжиан, не зависящий от t	18
2.4. Функционалы в виде интегралов по длине дуги	19
2.5. Некоторые геометрические задачи	19
3. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ	23
3.1. Постановка задачи	23
3.2. Система уравнений Эйлера	23
4. ЛАГРАНЖЕВА МЕХАНИКА	26
5. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИОНАЛОВ С ЛАГРАНЖИАНАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ	36
6. ЗАДАЧА СО СВОБОДНЫМИ КОНЦАМИ	40
7. ЭКСТРЕМУМЫ НЕСТАНДАРТНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ	44
7.1. Свойства вариации	44
7.2. Экстремум отношения функционалов	45
7.3. Экстремум произведения функционалов	46
8. ФУНКЦИОНАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	48
8.1. Уравнение минимальных поверхностей	51
9. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА	53
10. ЗАДАЧА ЛАГРАНЖА (ПОИСК УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА С ГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ)	61
10.1. Геодезические на заданной поверхности	66

11. Задача Больца	69
12. Задача Лагранжа с неголономными связями	73
13. Задача с подвижными концами	78
13.1. Задача с подвижными концами на двух заданных кривых	83
14. Экстремали с изломами	89
15. Вторая вариация и различение максимумов и минимумов	94
15.1. Необходимые условия минимума и максимума функционала	95
15.2. Формула для второй вариации и необходимые условия Лежандра	96
15.3. Исследование квадратичного функционала	99
15.4. Следствия для функционала $J(x)$	102
15.5. Список необходимых условий экстремума	103
15.6. Достаточные условия слабого экстремума	103
15.7. Достаточные условия сильного экстремума	105
16. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ	108
16.1. Постановка задачи	108
16.2. Основная теорема	109
16.3. Классическая задача об остановке	113
17. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ	122
17.1. Метод Ньютона	122
17.2. Метод Рунге	125
Библиографический список	129